

## 2. Основные методы интегрирования

№ п/п	Вид интеграла	Метод интегрирования	Параграф, в котором описан метод
1	2	3	8.4
1	$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$	Подстановка $\varphi(x) = u$ , $\varphi'(x)dx = du$	8.4
②	$\begin{cases} P_n(x)e^{kx}dx, \\ P_n(x)\sin kx dx, \\ P_n(x)\cos kx dx \end{cases}$	Интегрирование по частям $\int udv = uv - \int vdu$ . (Положить $u = P_n(x)$ )	8.4
③	$\begin{cases} P_n(x)\ln x dx, \\ P_n(x)\arcsin x dx, \\ P_n(x)\arccos x dx, \\ P_n(x)\arctg x dx, \\ P_n(x)\operatorname{arcsctg} x dx \end{cases}$	Интегрирование по частям $\int udv = uv - \int vdu$ (За $u$ принять множитель при $P_n(x)$ )	8.4
④	$\begin{cases} e^{ax}\cos bxdx, \\ e^{ax}\sin bxdx, \\ \sin(\ln x)dx, \\ \cos(\ln x)dx \end{cases}$	Двукратное интегрирование по частям	8.4

1	2	3	4
5	$\int \frac{dx}{x^2 + px + q}$ $(p^2 - 4q < 0)$	Выделение полного квадрата $x^2 + px + q = (x + p/2)^2 + (q - p^2/4)$	8.6
6	$\int \frac{Mx + N}{x^2 + px + q} dx$	Выделяя в числителе дифференциал знаменателя, представляю интеграл в виде суммы интегралов $\int \frac{dx}{x^2 + px + q}$ и $\int \frac{du}{u}$ , где $u = x^2 + px + q$	8.6
7	$I_n = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}$	Применение рекуррентной формулы $I_n = \frac{1}{a^2} \left( \frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1} + \frac{1}{2(n-1)} \frac{1}{(x^2 + a^2)^{n-1}} \right)$	8.6
8	$\int \frac{(Mx + N) dx}{(x^2 + px + q)^n}$ $(p^2 - 4q < 0)$	Тот же, что и для интегралов, рассмотренных в п. 6. В результате получается интеграл из п. 7	8.6
9	$\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} dx$	Выделение целой части (если $n \geq m$ ), разложение знаменателя $Q_m(x)$ на множители вида $(x-a)^k$ и $(x^2+px+q)^l$ и разложение рациональной дроби $P_n(x)/Q_m(x)$ на простейшие дроби	8.7
10	$\int R(\sin x, \cos x) dx$	Универсальная подстановка $\frac{x}{2} = t$ , тогда $\sin x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ , $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ , $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$ , или частные подстановки: 1) если $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ , то $\cos x = t$ ; 2) если $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ , то $\sin x = t$ ; 3) если $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$ , то $\frac{x}{2} = t$	8.8
11	$\int \sin^m x \cos^n x dx$	Универсальная или частные подстановки: 1) если $m, n \in \mathbb{N}$ и $m, n$ — четные числа, то производится понижение степеней формулами $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$ , $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$ ; 2) если $m$ — нечетное положительное число, то применяется подстановка $\cos x = t$ ; 3) если $n$ — нечетное положительное число, то используется подстановка $\sin x = t$	8.8

*Handwritten note:*  
 $I = \frac{1}{2} \int \frac{1}{(x^2+px+q)}$

1	2	3	4
12	$\int \cos mx \cos nx dx$ , $\int \sin mx \cos nx dx$ , $\int \sin mx \sin nx dx$	Разложение подынтегральной функции по формулам: $\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}(\cos(m+n)x + \cos(m-n)x)$ , $\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}(\sin(m+n)x + \sin(m-n)x)$ , $\sin mx \sin nx = \frac{1}{2}(-\cos(m+n)x + \cos(m-n)x)$	8.8
13	$\int R(x, \sqrt[n_1]{x^{m_1}}, \sqrt[n_2]{x^{m_2}}, \dots) dx$	Подстановка $x = t^s$ , где $s$ — общий знаменатель дробей $m_1/n_1, m_2/n_2, \dots$	8.9
14	$\int R(x, \sqrt[n_1]{(ax+b)^{m_1}}, \sqrt[n_2]{(cx+d)^{m_2}}, \dots) dx$	Подстановка $\frac{ax+b}{cx+d} = t^s$ , где $s$ — общий знаменатель дробей $m_1/n_1, m_2/n_2, \dots$	8.9
15	$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ <i>См. п. 5.5.6</i>	Выделение полного квадрата в подкоренном выражении и линейная подстановка	8.9
16	$\int \frac{(Ax+B) dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ <i>См. п. 5.5.6.</i>	Выделяя в числителе производную подкоренного выражения, представляю интеграл в виде суммы интегралов $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ и $\int \frac{du}{\sqrt{u}}$ , где $u = ax^2+bx+c$	8.9
17	$\int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2+bx+c}}$	Подстановка $x = 1/t$ , приводящая к интегралам вида $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$	8.9
18	$\int R(x, \sqrt{a^2-x^2}) dx$ , $\int R(x, \sqrt{x^2+a^2}) dx$ , $\int R(x, \sqrt{x^2-a^2}) dx$	Рационализация с помощью одной из следующих подстановок: $x = a \sin t$ (или $x = a \cos t$ ), $x = a \operatorname{tg} t$ (или $x = a \operatorname{ctg} t$ ), $x = \frac{a}{\cos t}$ (или $x = \frac{a}{\sin t}$ )	8.9
19	$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) dx$	Выделение полного квадрата в подкоренном выражении и линейная подстановка, приводящая к одному из интегралов, рассмотренных в п. 18	8.9

*Handwritten notes:*  
 $x = \frac{1}{t}$   
 $dx = -\frac{1}{t^2} dt$   
 $\int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2+bx+c}} = \int \frac{-\frac{1}{t^2} dt}{\frac{1}{t^2} \sqrt{a + bt + ct^2}} = \int \frac{-dt}{\sqrt{a + bt + ct^2}}$