# МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Конспект лекций

## 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ, ТЕРМИНОЛОГИЯ, СИМВОЛИКА

### 1.1. Терминология и символика

#### *Необходимость и достаточность, эквивалентность утверждений*

Всякое математическое утверждение, в том числе и теорема, имеет следующий вид: «если $A$, то $B$», или, что то же самое, «из $A$ следует $B$», или $A \Rightarrow B$, при этом $A$ – условие теоремы, $B$ – заключение теоремы. Поменяв местами $A$ и $B$, т.е. «из $B$ следует $A$», или «если $B$, то $A$», $B \Rightarrow A$, получим теорему, обратную первой. Если исходная теорема верна, обратная ей может быть как верной, так и неверной.

**Определение.** Необходимым условием утверждения $A$ будем называть любое утверждение, которое следует из $A$, т.е. если $A \Rightarrow B$, то $B$ – необходимое условие $A$.

**Определение.** Достаточным условием утверждения $A$ будем называть любое утверждение, из которого следует $A$, т.е. если $B \Rightarrow A$, то $B$ – достаточное условие $A$.

**Определение.** Если верно $A \Rightarrow B$, а также верно и обратное утверждение $B \Rightarrow A$, утверждения $A$ и $B$ называют эквивалентными или говорят, что условие $B$ необходимо и достаточно для $A$ (или условие $A$ необходимо и достаточно для $B$), при этом пишут $A \Leftrightarrow B$.

#### *Кванторы*

При записи формулировок теорем и математических рассуждений целесообразно использовать логические символы, называемые кванторами:

а) квантор всеобщности $\forall$ означает «для всех», «для каждого»;

б) квантор существования $\exists$ означает «существует», «найдется».

### 1.2. Элементы теории множеств

**Определение.** Множеством называется совокупность каких-либо объектов, мыслимых как единое целое. Объекты, из которых состоит множество, называются элементами множества.

Обозначают множества заглавными буквами $A, B, \ldots$, элементы множества – $a, b, \ldots$.

Запись «$a \in A$» означает «$a$ принадлежит множеству $A$», «$a \notin A$» – соответственно «$a$ не принадлежит $A$».

Множества могут быть заданы простым перечислением элементов:

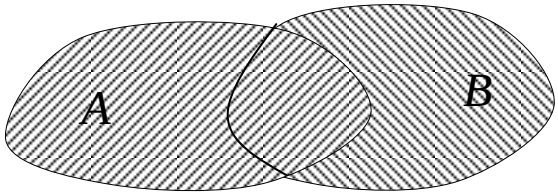
$$A = \{1; 4; 9; 16\}$$

или указанием свойств, по которым определяются элементы, входящие в данное множество

$$A = \left\{ x : x^2 - 2 \le 0 \right\}.$$

***Действия над множествами***

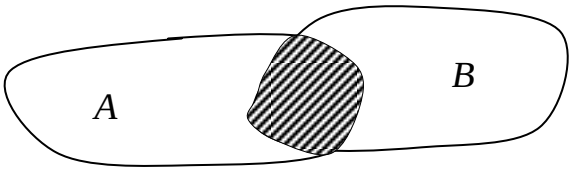
1) Объединением множеств $A$ и $B$ называется множество, состоящее из элементов, принадлежащих хотя бы одному из данных множеств.




$A \bigcup B$ – объединение $A$ и $B$

Рис. 1

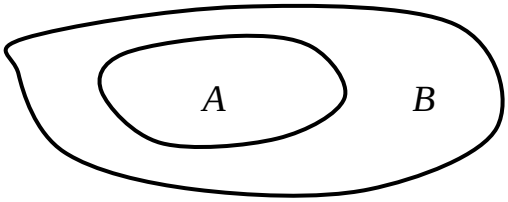
2) Пересечением множеств $A$ и $B$ называется множество, состоящее из элементов, принадлежащих одновременно и $A$, и $B$.




$A \bigcap B$ – пересечение $A$ и $B$

Рис. 2

3) Множество $A$ называется подмножеством множества $B$, если каждый элемент $A$ принадлежит и множеству $B$.




$A \subset B$ – $A$ есть подмножество $B$

Рис. 3

4) Будем обозначать $\varnothing$ пустое множество, не содержащее ни одного элемента.

### 1.3. Числовые множества. Действительные числа

$\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел, $\mathbb{N}=\{1;2;3;...\}$.

$\mathbb{Z}$ – множество целых чисел, $\mathbb{Z}=\{0;\pm1;\pm2;...\}$.

$\mathbb{R}$ – множество действительных чисел, $\mathbb{R}=\{x:-\infty<x<+\infty\}$.

На множестве действительных чисел рассмотрим его подмножества, которые называются промежутками.

Интервал: $(a;b)=\{x\in\mathbb{R}:a<x<b\}$.

Отрезок: $[a;b]=\{x\in\mathbb{R}:a\le x\le b\}$.

Полуинтервалы: $(a;b]=\{x\in\mathbb{R}:a<x\le b\}$, $[a;b)=\{x\in\mathbb{R}:a\le x<b\}$.

Множество действительных чисел $\mathbb{R}$ представляет собой объединение двух непересекающихся подмножеств – множества рациональных и множества иррациональных чисел.

Рациональные числа – это действительные числа, которые можно представить в виде отношения двух целых чисел. В десятичной записи они задаются либо конечной, либо бесконечной периодической десятичной дробью:

$$4;-\frac{1}{3};0{,}125;1{,}22727;1{,}(3).$$

Иррациональные числа – это действительные числа, которые нельзя представить в виде отношения двух целых чисел. В десятичной записи они задаются бесконечной непериодической десятичной дробью. Например,

$$\pi,\sqrt{2},\sqrt{3},\lg 5.$$

**Определение.** Числовой осью называется прямая, на которой заданы: 1) направление; 2) начало отсчета (точка $O$); 3) масштаб (точка 1).

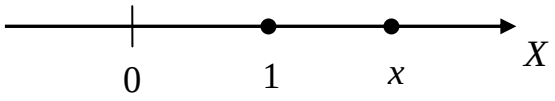



Рис. 4

Множество действительных чисел и множество точек числовой оси находятся во взаимно-однозначном соответствии: каждой точке $M$ числовой оси соответствует действительное число $x$, которое называется координатой точки $M$, пишут $M(x)$, т.е. «точка $M$, имеющая координату $x$».

**Модуль действительного числа.** Одной из характеристик действительного числа является его абсолютная величина или модуль. По определению,

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0, \\ -a, & \text{если } a < 0. \end{cases}$$

Свойства модуля:

1) $|x| \geq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}; \ |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0;$

2) $|xy| = |x| \cdot |y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R};$

3) $|x + y| \leq |x| + |y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R};$

4) $|x - y| \geq |x| - |y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$

Геометрически модуль числа $x$ есть расстояние от точки числовой оси, соответствующей данному числу, до начала отсчета.

Если на числовой оси отмечены две точки $M_1(x_1)$ и $M_2(x_2)$, то расстояние между ними $\rho(M_1, M_2) = |x_1 - x_2|$.

**Пример**. Изобразим на числовой оси множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $|x - 2| \leq 3$.

Т.к. $|x - 2| = \rho(x; 2)$, неравенство запишется так: $\rho(x; 2) \leq 3$, т.е. множество точек с координатами $x$, расстояние от которых до точки 2 меньше или равно 3. Эти точки расположены на отрезке $[-1; 5]$ (рис. 5).

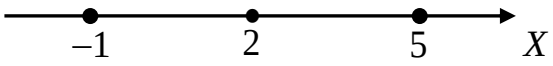



Рис. 5

*Контрольные вопросы*

1. Что называется множеством? Какие действия над множествами можно производить?
2. Приведите примеры числовых множеств.
3. Дайте определение модуля числа и приведите свойства модуля.

# 2. ФУНКЦИЯ

## 2.1. Понятие функции, сложная функция, взаимно обратные функции

**Определение.** Пусть $X$ и $Y$ – два произвольных множества. Отображением множества $X$ в множество $Y$ называется закон $f$, по которому каждому элементу множества $X$ ставится в соответствие некоторый, причем единственный, элемент множества $Y$. Обозначают:

$$X \xrightarrow{f} Y \quad \text{или} \quad f : X \to Y .$$

Также графически отображение можно представить, как на рис. 6. Стрелками показано, какой элемент множества $Y$ соответствует элементу множества $X$.

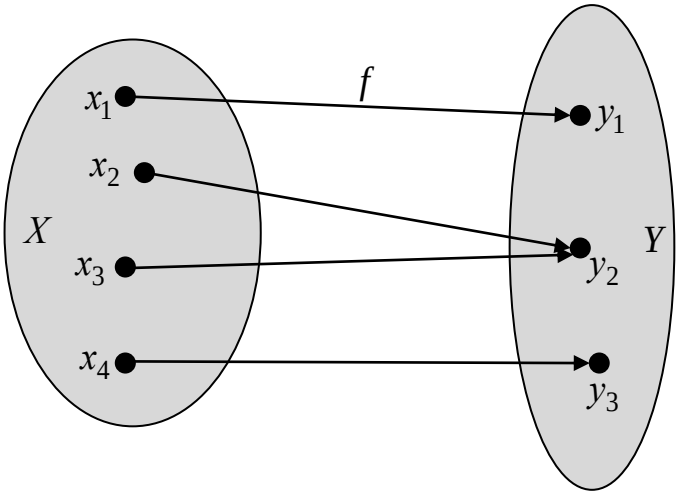



Рис. 6

В случае, если $X$ и $Y$ – множества действительных чисел, отображение $f$ называется действительной функцией одного действительного переменного или просто функцией.

**Определение.** Функцией называется правило, по которому каждому числу из множества $X$ ставится в соответствие некоторое, притом единственное, число из множества $Y$.

$$X \xrightarrow{f} Y \Leftrightarrow y = f(x), \quad x \in X, \quad y \in Y .$$

При этом $x \in X$ называется независимой переменной или аргументом, $y \in Y$ – зависимой переменной или значением функции.

**Определение.** Множество $X$ называется областью определения функции и обозначается $D(f) = X$, множество значений $y$, соответствующих по правилу $f$ множеству $D(f)$, называется областью изменения (множеством значений) функции и обозначается $E(f) = Y$.

Функция может быть задана следующими способами.

1) Табличный. В первой строке таблицы размещены значения переменной $x$, а во второй – $y$ (табл. 1).

Таблица 1

| $X$ | $x_1$ | $x_2$ | … | $x_n$ |
|---|---|---|---|---|
| $Y$ | $y_1$ | $y_2$ | … | $y_n$ |

2) Графический, т.е. с помощью кривой, координаты точек на которой – это значение переменной $x$ и соответствующее ему значение переменной $y$.

3) Аналитический, т.е. с помощью формулы, выражающей переменную $y$ через переменную $x$:

$$y = f(x),\ f \text{ – некоторая формула.}$$

Если функция задана формулой $y = f(x)$, то графиком функции называется множество точек координатной плоскости, координаты которых удовлетворяют соотношению $y = f(x)$.

**Определение.** Областью определения (естественной областью определения) называется множество значений переменной $x$, при которых выражение $f(x)$ имеет смысл.

При нахождении области определения нужно учитывать следующие условия:

1) выражение под корнем четной степени должно быть неотрицательным;

2) знаменатель дроби не должен быть равен нулю;

3) аргумент логарифма должен быть положительным;

4) аргументы арксинуса и арккосинуса должны принадлежать отрезку $[-1; 1]$;

5) аргумент тангенса не должен быть равен $\frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$, аргумент котангенса не должен быть равен $\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

**Примеры.**

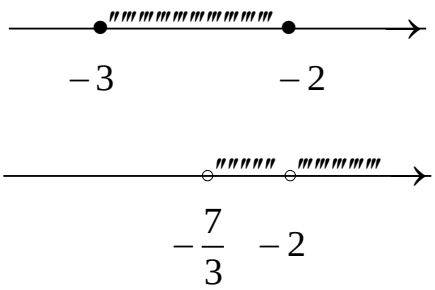
1) $y = \sqrt{3x+4}$. $3x + 4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{4}{3}$. Значит, $D(f) = \left[-\frac{4}{3}; +\infty\right)$

2) $y = \frac{2x}{x^2 - 4}$. $x^2 - 4 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm 2$.

Значит, $D(f) = (-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; +\infty)$.

3) $y = \arcsin(2x+5) - \frac{1}{\ln(3x+7)}$.

$$D(f):\begin{cases}|2x+5|\le 1,\\ 3x+7>0,\\ \ln(3x+7)\ne 0.\end{cases}$$




$$|2x+5|\le 1 \Leftrightarrow \begin{cases}2x+5\le 1,\\ 2x+5\ge -1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x\le -4,\\ 2x\ge -6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\le -2,\\ x\ge -3.\end{cases}$$

$$3x+7>0 \Leftrightarrow 3x>-7 \Leftrightarrow x>-\frac{7}{3}.$$

$$\ln(3x+7)\ne 0 \Leftrightarrow 3x+7\ne 1 \Leftrightarrow x\ne -2.$$

Значит, $D(f)=\left(-\frac{7}{3};-2\right)$.

### *Понятие сложной функции*

Пусть заданы две функции $y=f(u)$ и $u=g(x)$ такие, что $E(g)=D(f)$, т.е. $f:U\to Y;\ \ g:X\to U$ (рис. 7).

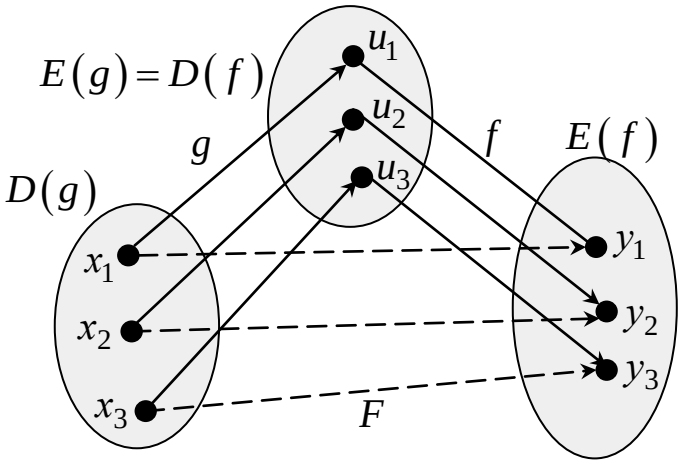



Рис. 7

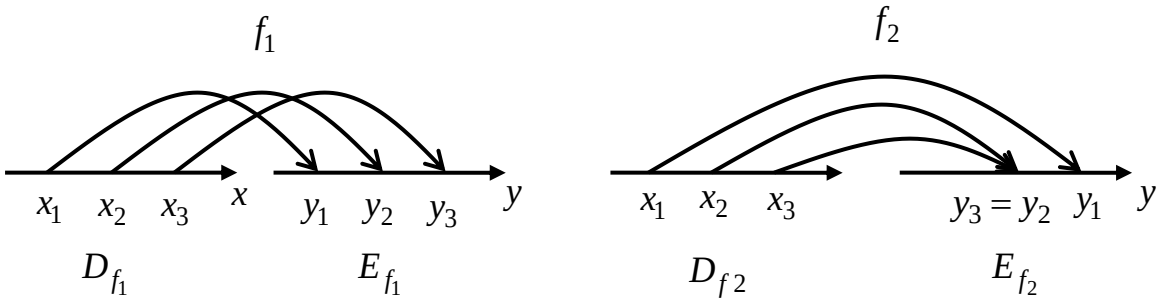
Два отображения $f$ и $g$ задают правило, по которому числам из множества $X$ ставятся в соответствие числа из множества $Y$. Тем самым определяется новая функция $F$, которая называется сложной функцией или суперпозицией функций $f$ и $g$:

$$y=F(x) \text{ или } y=f(g(x)).$$

Переменная $u$ называется промежуточной переменной.

### *Понятие обратной функции*

**Определение.** Функция $f(x)$ называется обратимой, если для любого элемента $y \in E(f)$ уравнение $y = f(x)$ имеет единственное решение $x \in D(f)$.




Функция $f_1$ обратимая  Функция $f_2$ необратимая

Рис. 8

Пусть функция $y = f(x)$ обратимая, ее область определения $D(f) = X$, область изменения $E(f) = Y$.

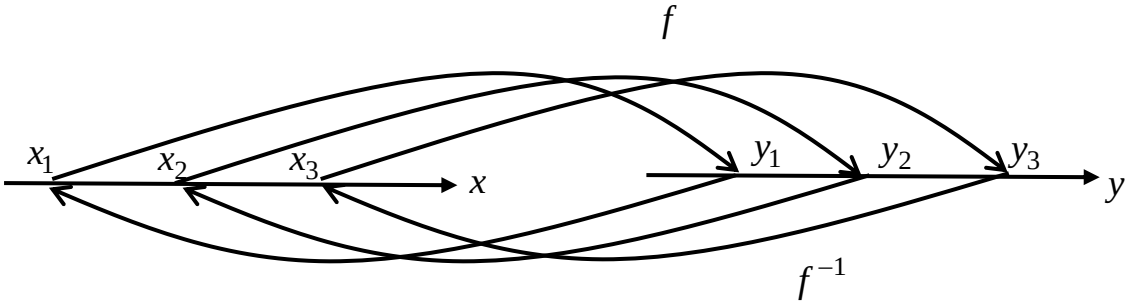



Рис. 9

**Определение.** Поставим в соответствие каждому элементу $y$ из множества $E(f)$ тот единственный элемент $x$ из множества $D(f)$, который переходил в него по правилу $f$. Этот закон соответствия называется функцией, обратной к функции $f$ и обозначается $f^{-1}$:

$$x = f^{-1}(y).$$

Ясно, что $D\left(f^{-1}\right) = E(f)$, $E\left(f^{-1}\right) = D(f)$.

Обычно при записи аналитически заданной обратной функции переименовывают входящие в нее переменные и задают обратную функцию в виде $y = f^{-1}(x)$.

Если функции $y = f(x)$ и $y = f^{-1}(x)$ взаимно обратные, их графики в декартовой системе координат симметричны относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов. Из известных функций взаимно обратными являются, например, $y = a^x$ и $y = \log_a x$.

**Пример**. Рассмотрим квадратичную функцию $y = x^2$ (график на рис. 10).

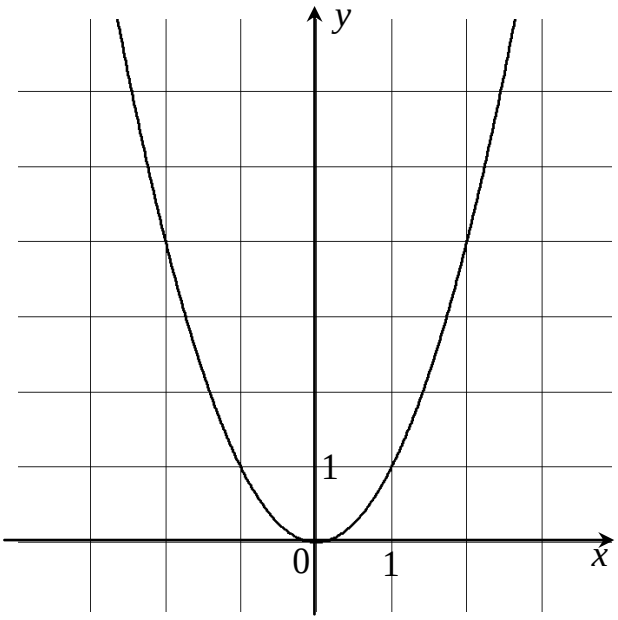



Рис. 10

Эта функция не является обратимой, т.к. при любом положительном значении $y_0 \in (0;+\infty]$ уравнение $x^2 = y_0$ имеет два решения: $\sqrt{y_0}$ и $-\sqrt{y_0}$. Но рассматривая функцию $y = x^2$ не на всем множестве $\mathbb{R}$, а только на неотрицательной его части $[0;+\infty)$, можно построить функцию, обратную к данной. Она задается формулой $y = \sqrt{x}$. Графики изображены на рис. 11.

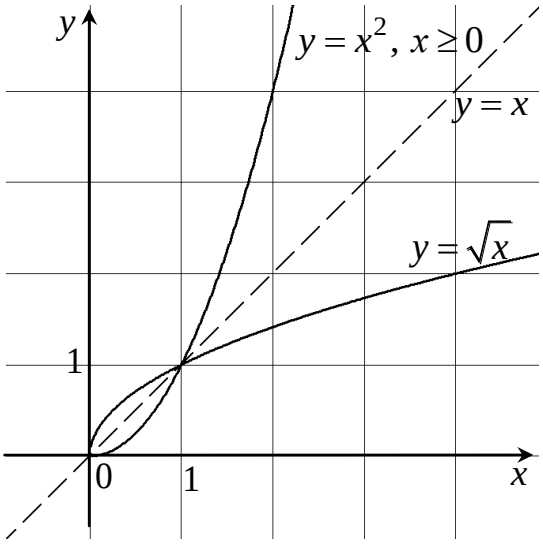



Рис. 11

Для того чтобы выразить аналитически функцию, обратную к данной, надо из соотношения $y = f(x)$ выразить $x$ через $y$, а затем переименовать переменные.

**Пример.** Найти функцию, обратную к $y = \dfrac{2x+1}{x-3}$.

**Решение.** Выразим $x$ через $y$:

$$y(x-3) = 2x+1,$$
$$xy - 3y = 2x+1,$$
$$xy - 2x = 3y+1,$$
$$x(y-2) = 3y+1,$$
$$x = \frac{3y+1}{y-2}.$$

Переименуем переменные: $y = \dfrac{3x+1}{x-2}$. Функции $y = \dfrac{2x+1}{x-3}$ и $y = \dfrac{3x+1}{x-2}$ являются взаимно обратными.

## 2.2. Элементы поведения функции

**1) Четность, нечетность функции**

**Определение.** Функция $y = f(x)$ называется четной (нечетной), если:

а) ее область определения симметрична относительно начала координат;

б) для любого значения $x$ из области определения выполняется соотношение $f(-x) = f(x)$ $\left(f(-x) = -f(x)\right)$.

**Замечание.** График четной функции симметричен относительно оси $Oy$, график нечетной функции симметричен относительно начала координат.

**Замечание.** Если функция не является ни четной, ни нечетной, она называется функцией общего вида.

**Пример**. Исследуйте функцию на четность: $y = 3x^3 - 2x^2$.

**Решение.** Область определения $D(f) = (-\infty; \infty)$ симметрична относительно начала координат.

$$f(-x) = 3(-x)^3 - 2(-x)^2 = -3x^3 - 2x^2,$$
$$f(-x) \neq f(x), \quad f(-x) \neq -f(x).$$

Вывод: функция $y = 3x^3 - 2x^2$ функция общего вида.

**Пример**. Исследуйте функцию на четность: $f(x) = 2^x + 2^{-x}$.

**Решение.** Область определения $D(f) = (-\infty; +\infty)$ симметрична относительно начала координат.

$$f(-x)=2^{-x}+2^{-(-x)}=2^{-x}+2^{x}.$$

Т.к. $f(-x)=f(x)$, то функция $f(x)=2^{x}+2^{-x}$ четная.

**Пример**. Исследуйте функцию на четность: $f(x)=\lg\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$.

**Решение.** Область определения $D(f)=(-\infty;\infty)$ симметрична относительно начала координат.

$$f(-x)=\lg\left(-x+\sqrt{1+(-x)^2}\right)=\lg\frac{\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)}{\sqrt{1+x^2}+x}=$$

$$=\lg\frac{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2-(x)^2}{x+\sqrt{1+x^2}}=\lg\frac{1+x^2-x^2}{x+\sqrt{1+x^2}}=\lg\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}=$$

$$=\lg\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^{-1}=-\lg\left(x+\sqrt{1+x^2}\right).$$

Т.к. $f(-x)=-f(x)$, то функция $f(x)=\lg\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ нечетная.

**2) Периодичность**

**Определение.** Функция $y=f(x)$ называется периодической, если существует такое, не равное нулю, число $T$, что:

а) $\forall x\in D(f),\ \ x\pm T\in D(f)$;

б) $\forall x\in D(f),\ \ f(x\pm T)=f(x)$.

При этом число $T$ называется периодом функции $f(x)$.

Наименьший из положительных периодов функции называется основным периодом и обозначается $T_0$, при этом все периоды данной функции определяются формулой

$$T=kT_0,\ \ k\in\mathbb{Z}.$$

Например, для функции $y=\sin x$ $T_0=2\pi$, $T=2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

**Замечание.** При исследовании периодической функции или построении ее графика достаточно знать значения функции на любом отрезке числовой оси длиною в период.

**3) Ограниченность**

**Определение.** Функция $y=f(x)$, определенная на множестве $X$, называется ограниченной сверху (снизу) на этом множестве, если существует такое число $M$, что для любого значения $x\in X$ выполняется неравенство

$$f(x)\le M\ \ \left(f(x)\ge M\right).$$

Функция, ограниченная сверху и снизу на множестве $X$, называется ограниченной на этом множестве.

**Пример**. Функция $y = 2^x$ на множестве $\mathbb{R}$ является ограниченной снизу, т.к. $\forall x \in (-\infty;\infty)$ верно неравенство $2^x > 0$ $(M = 0)$.

**Пример**. Функция $y = \sin x$ является ограниченной на $\mathbb{R}$, т.к. при всех $x \in (-\infty;\infty)$ выполняется неравенство $-1 \le \sin x \le 1$.

**4) Монотонность**

**Определение.** Функция $y = f(x)$, определенная на множестве $X$, называется возрастающей (убывающей) на этом множестве, если для любых значений $x_1, x_2 \in X$, таких, что $x_1 < x_2$ выполняется неравенство

$$f(x_1) < f(x_2) \quad (f(x_1) > f(x_2)).$$

Краткая запись определения:

$f(x)$ возрастает на $X$: $\forall x_1, x_2 \in X,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$,

$f(x)$ убывает на $X$: $\forall x_1, x_2 \in X,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Возрастающие и убывающие функции называются строго монотонными.

Если в определении строгие неравенства заменим на нестрогие, получим определение неубывающей и невозрастающей функций:

$f(x)$ неубывающая на $X$: $\forall x_1, x_2 \in X,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$,

$f(x)$ невозрастающая на $X$: $\forall x_1, x_2 \in X,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2)$.

Такие функции называются монотонными на $X$.

## 2.3. Обзор основных элементарных функций

1. **Степенная** $y = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

На рис. 12–17 изображены графики степенных функций при $\alpha = 2$, $\alpha = 3$, $\alpha = -1$, $\alpha = -2$, $\alpha = 1/2$, $\alpha = 1/3$.

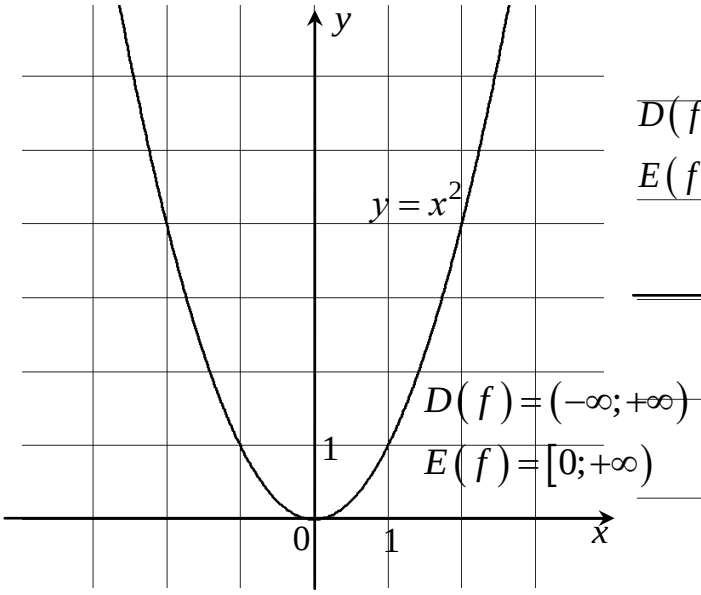



Рис. 12

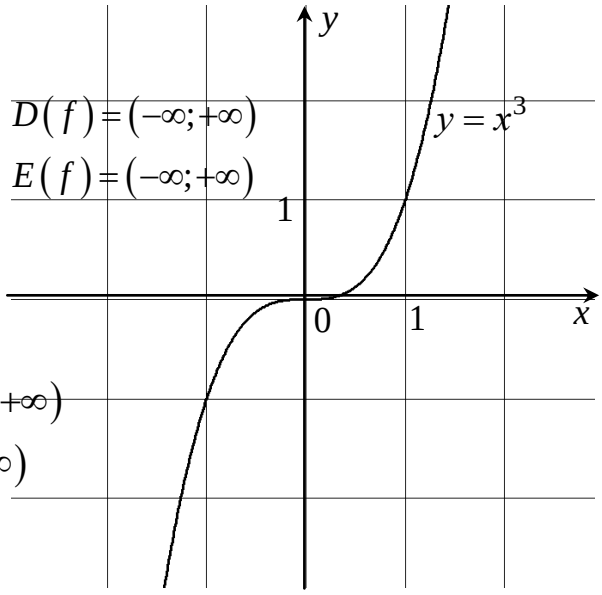



Рис. 13

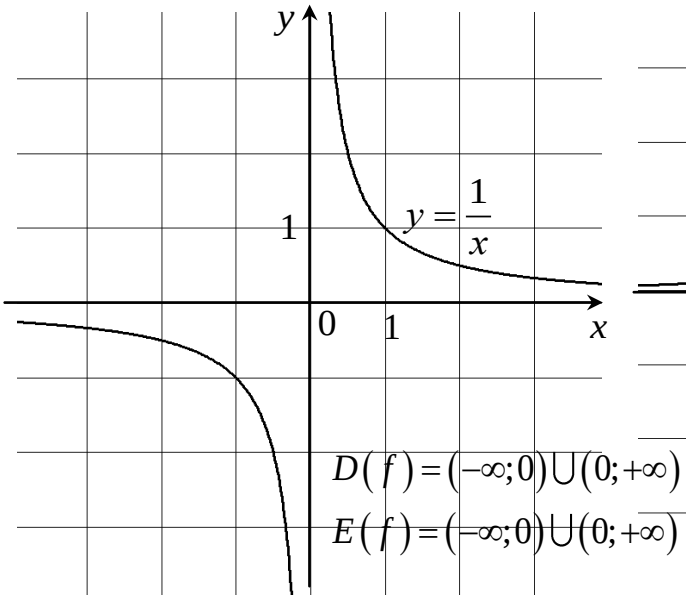



Рис. 14

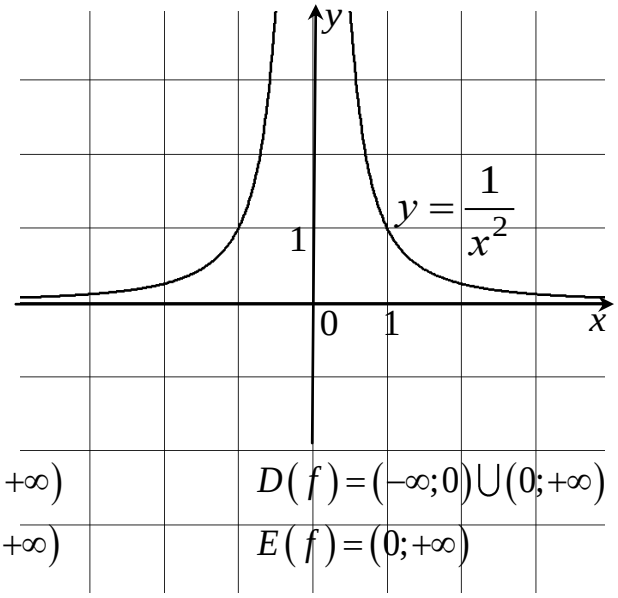



Рис. 15

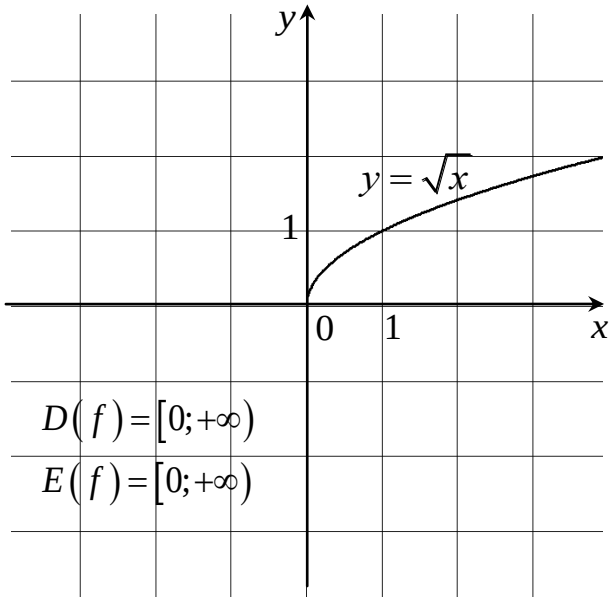



Рис. 16

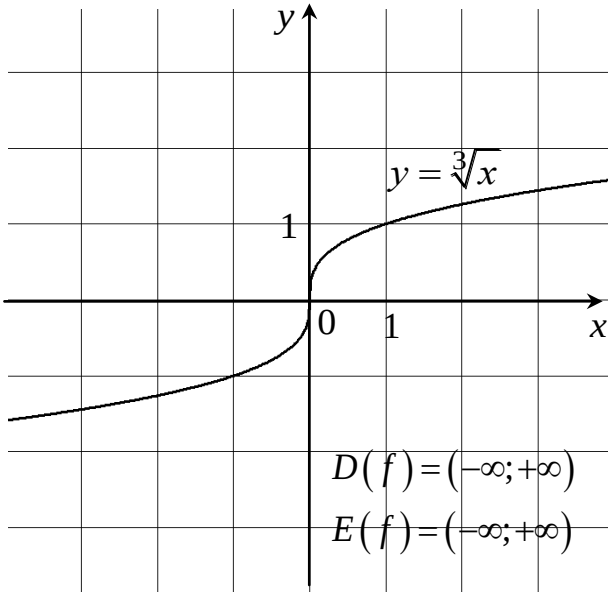



Рис. 17

2. **Показательная** $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq 1)$.

При $a>1$ функция $y=a^x$ возрастающая на $D(f)=\mathbb{R}$, при $0<a<1$ функция $y=a^x$ убывающая на $\mathbb{R}$ (рис. 18).

Графики всех показательных функций проходят через точку $(0;1)$ координатной плоскости.

Рассмотрим несколько показательных функций $y=a^x$ с основаниями $a>1$. Проведем к графикам этих функций касательные в точке $(0;1)$ (рис. 19). Обозначим через $\varphi$ угол, образованный касательной и положи-

тельным направлением оси $Ox$. С изменением основания $a$ меняется и угол $\varphi$.

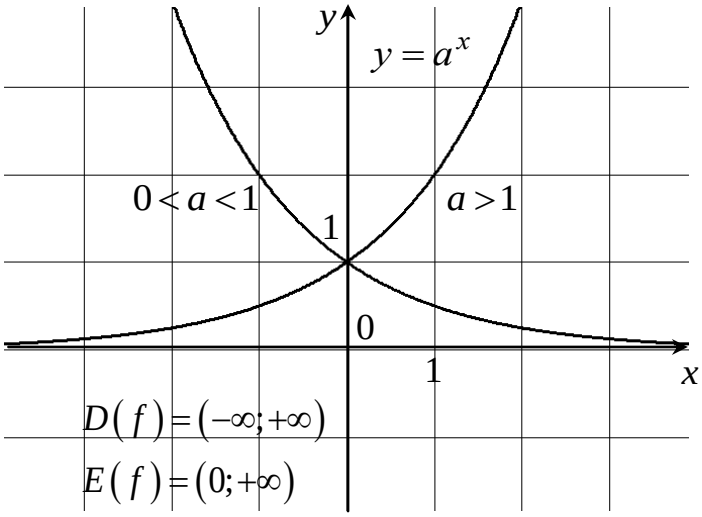



Рис. 18

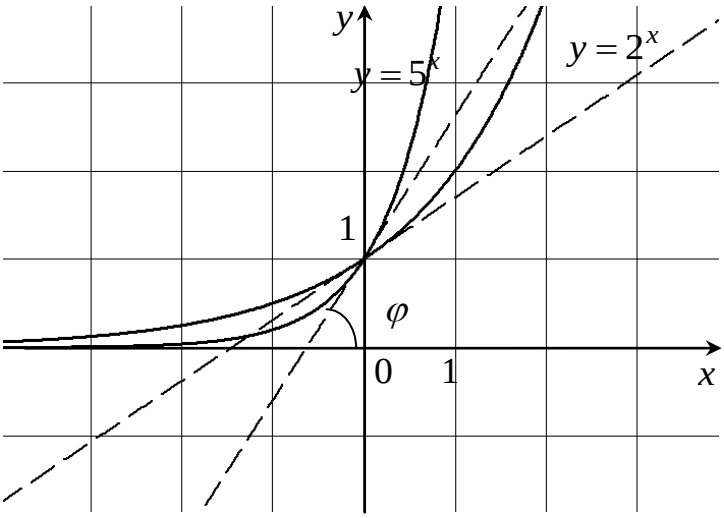



Рис. 19

**Определение.** То значение основания $a$ функции $y = a^x$, для которого угол $\varphi$, образованный касательной к графику в точке $(0;1)$ и положительным направлением оси $Ox$, равен $45°$, называется числом $e$, а сама показательная функция $y = e^x$ называется экспонентой. График на рис. 20.

$$y = e^x = \exp(x).$$

Число $e$ иррациональное, $e = 2,71828...$ .

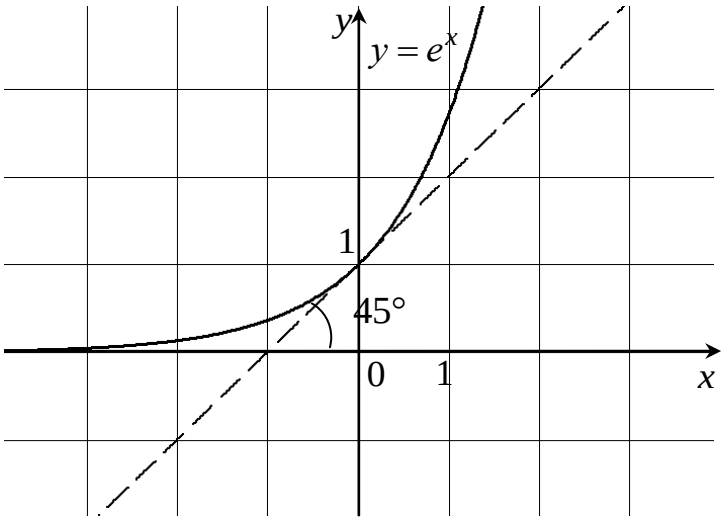



Рис. 20

3. **Логарифмическая** $y = \log_a x \ \left(a > 0, \ \ a \neq 1\right)$.

Функция определяется как обратная к показательной функции $y = a^x$.

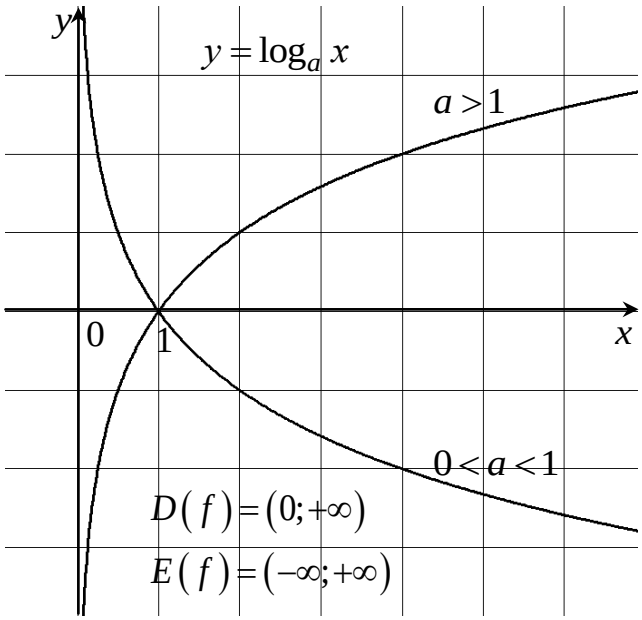



Рис. 21

При $a > 1$ функция $y = \log_a x$ возрастающая на области определения, при $0 < a < 1$ – убывающая (рис. 21).

**Определение.** Логарифмическая функция с основанием, равным числу $e$ называется натуральным логарифмом и обозначается $\ln x$:

$$y = \log_e x \text{ или } y = \ln x.$$

4. **Тригонометрические функции**.

Функции $y = \sin x$ и $y = \cos x$ периодические. Их основной период равен $T_0 = 2\pi$. Функция $y = \sin x$ нечетная, а $y = \cos x$ четная. Графики на рис. 22, 23.

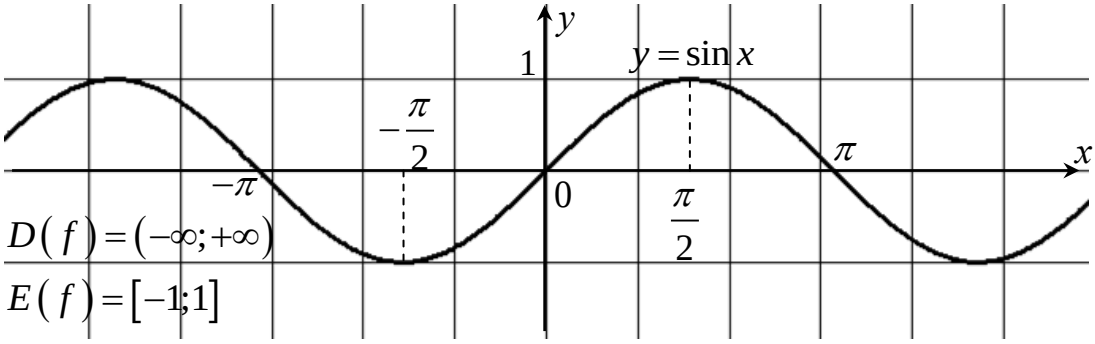



Рис. 22

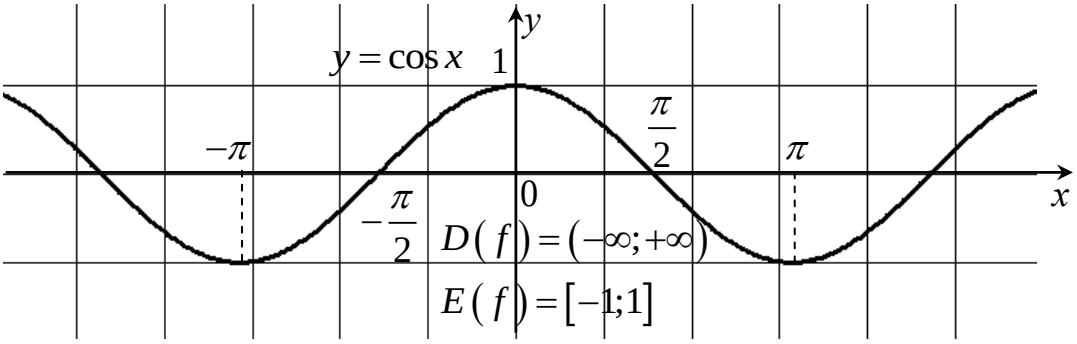



Рис. 23

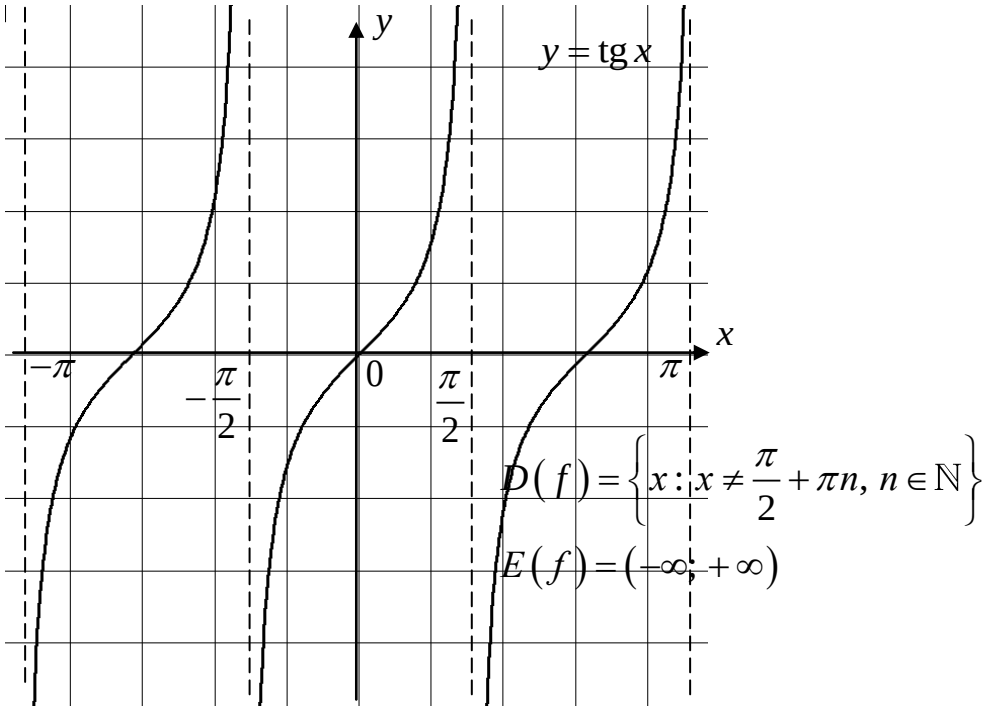



Рис. 24

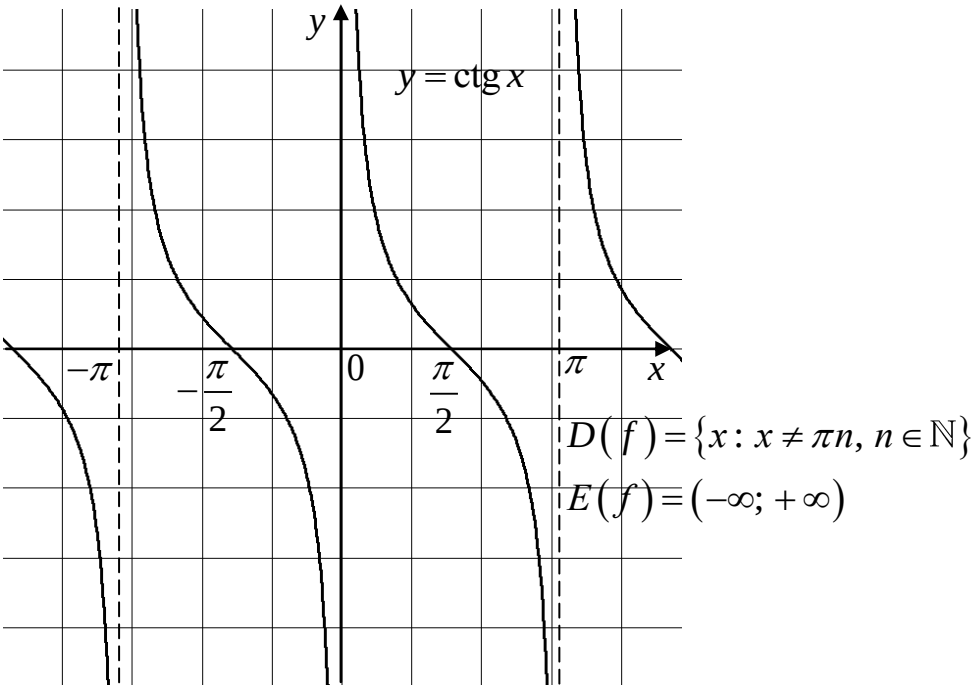



Рис. 25

Функции $y = \operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ и $y = \operatorname{ctg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ периодические. Их основной период равен $T_0 = \pi$. Обе функция нечетные. Графики на рис. 24, 25.

5. **Обратные тригонометрические функции**

а) $y = \arcsin x$.

Функция $y = \sin x$ не является обратимой во всей своей области определения, т.к. каждое ее значение $y \in E(f)$ получается из бесчисленного множества различных значений $x$. График на рис. 26.

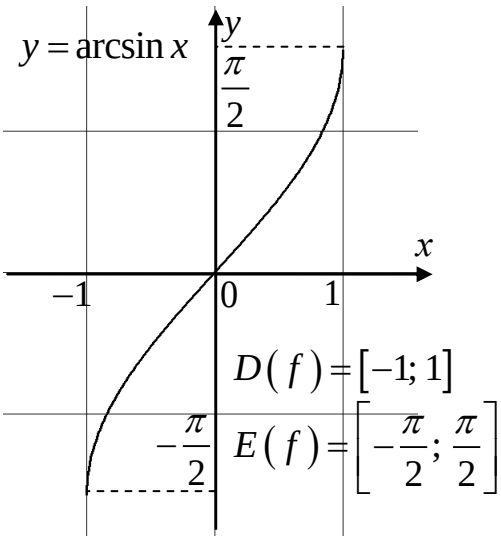



Рис. 26

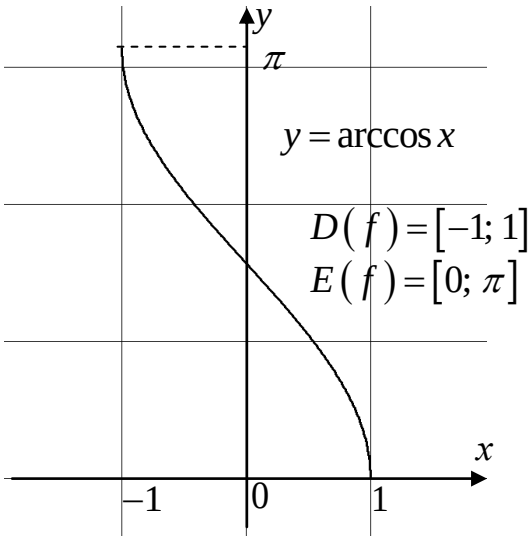



Рис. 27

Поэтому рассматривают функцию $y=\sin x$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. На этом множестве функция $y=\sin x$ имеет обратную, которая обозначается $y=\arcsin x$. Эта функция нечетная.

б) $y=\arccos x$.

Эта функция является обратной к функции $y=\cos x$, рассматриваемой на множестве $[0;\pi]$. Она общего вида. График на рис. 27.

в) $y=\operatorname{arctg} x$. Эта функция является обратной к функции $y=\operatorname{tg} x$, рассматриваемой на множестве $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$. Она нечетная. График на рис. 28.

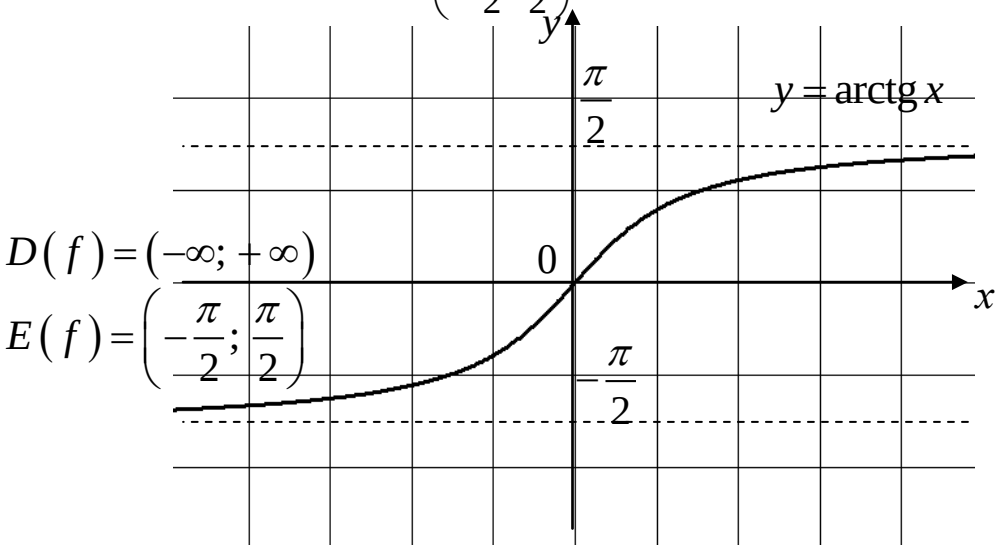



Рис. 28

г) $y=\operatorname{arcctg} x$.

Обратная к функции $y=\operatorname{ctg} x$ на множестве $(0;\pi)$. Она общего вида. График на рис. 29.

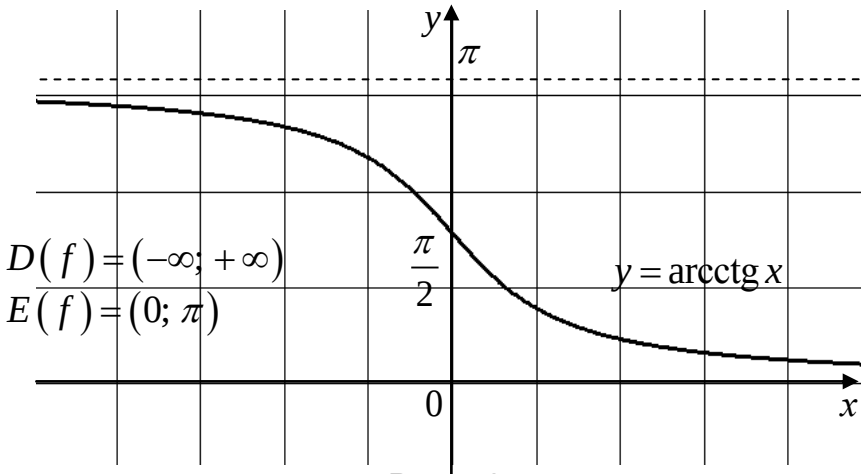



Рис. 29

## 2.4. Понятие элементарной функции

**Определение.** Всякая функция, которая может быть явным образом задана с помощью одной формулы, содержащей лишь конечное число арифметических операций и суперпозиций основных элементарных функций, называется элементарной функцией.

Например, функции $y = 1 + \sqrt{\lg \cos \pi x}$, $y = \sin \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$, $y = \frac{x + |x|}{\sqrt{1 - x^2}}$ являются элементарными.

Функция $y = \begin{cases} x^2, & x \ge 0, \\ 1 + x, & x > 0 \end{cases}$ не является элементарной, т.к. задается разными формулами для различных значений $x$.

## 2.5. Примеры построения графиков функций

1) Дробно-линейная функция $y = \frac{3x - 1}{x + 2}$.

Этот график по форме похож на график функции $y = \frac{1}{x}$. Но асимптоты совмещаются с прямыми $y = 3$ и $x = -2$ (рис. 30).

В общем случае асимптоты графика функции $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ – это прямые $x = -\frac{d}{c}$ и $y = \frac{a}{c}$.

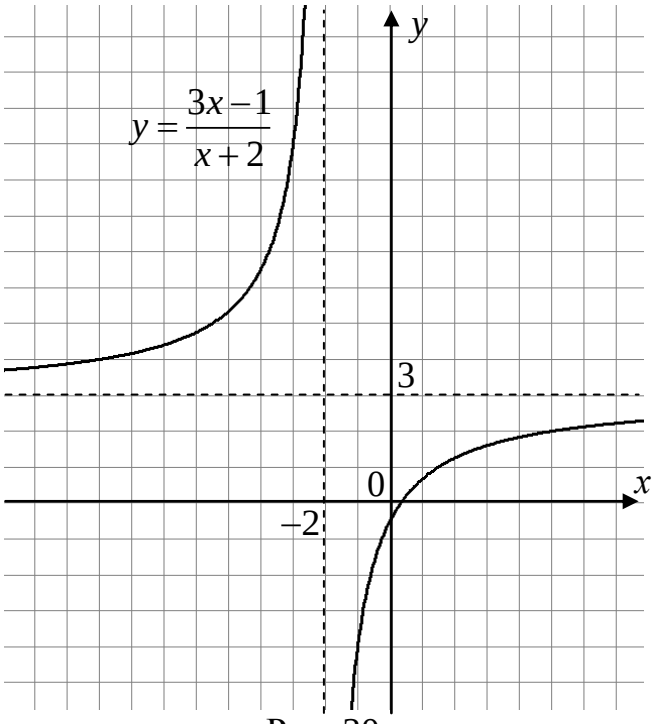



Рис. 30

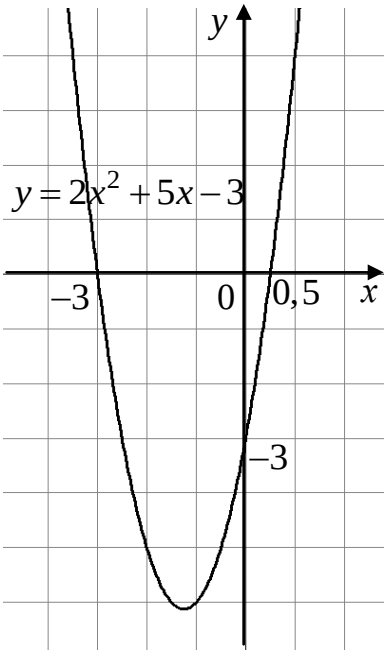


Рис. 31

2) Квадратный трехчлен $y=2x^2+5x-3$. Графиком является парабола (рис. 31).

Вершина находится в точке с абсциссой $x_0=-\frac{b}{2a}=-\frac{5}{2\cdot 2}=-1,25$.

Ордината вершины

$y_0=y(-1,25)=2(-1,25)^2+5(-1,25)-3=-6,125$.

Абсциссы точек пересечения с осью $Ox$ – корни уравнения $2x^2+5x-3=0$: $x_1=-3$ и $x_2=0,5$.

Ордината точки пересечения с осью $Oy$ $y(0)=-3$.

## 2.6. Преобразование графиков функций

Пусть построен график функции $y=f(x)$. С помощью преобразований из этого графика можно получить графики некоторых других функций.

1. $y=f(x)+B$. Параллельный перенос вдоль оси $Oy$ на $B$ вверх, если $B>0$, и на $|B|$ вниз, если $B<0$.

2. $y=f(x-b)$. Параллельный перенос вдоль оси $Ox$ на $b$ вправо, если $b>0$, и на $|b|$ влево, если $b<0$.

3. $y=Af(x)$. Растяжение в $A$ раз от оси $Ox$ при $A>1$ и сжатие в $\frac{1}{A}$ раз к оси $Ox$ при $0<A<1$.

4. $y=f(ax)$. Сжатие в $a$ раз к оси $Oy$ при $a>1$ и растяжение в $\frac{1}{a}$ раз от оси $Oy$ при $0<a<1$.

5. $y=-f(x)$. Отображение относительно оси $Ox$.

6. $y=f(-x)$. Отображение относительно оси $Oy$.

7. $y=|f(x)|$. Часть графика выше оси $Ox$, остается без изменений, а часть графика ниже оси $Ox$, отображается симметрично относительно этой оси вверх.

8. $y=f(|x|)$. Часть графика слева от оси $Oy$, убирается. Часть графика справа от оси $Oy$, остается без изменений и отображается симметрично относительно этой оси влево.

9. $|y| = f(x)$. Линия, заданная этим уравнением – это объединение частей графиков двух функций: $y = f(x)$ и $y = -f(x)$, расположенных на участках числовой оси, на которых $f(x) \geq 0$.

**Пример.** Покажем, как меняется график функции при изменении формулы на примере функции $y = \sin x$ (рис. 32–35).

1)

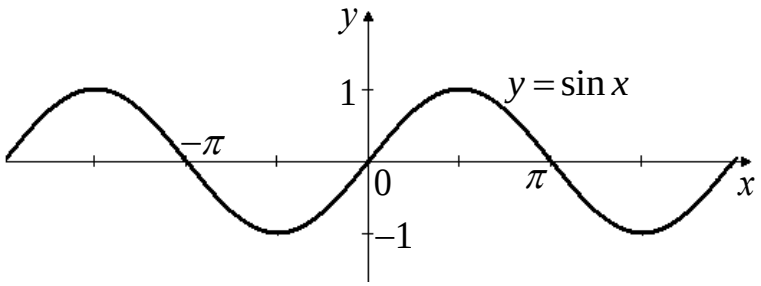



Рис. 32

2)

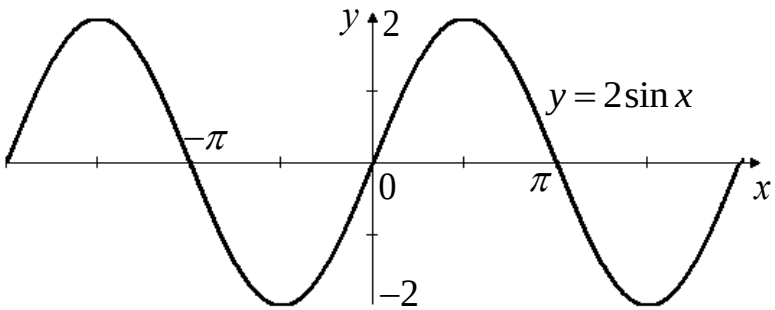



Рис. 33

3)

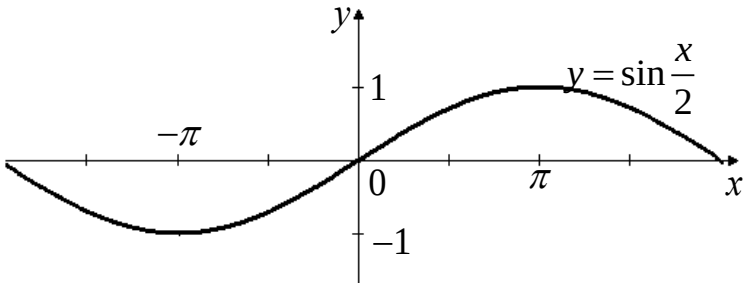



Рис. 34

4)

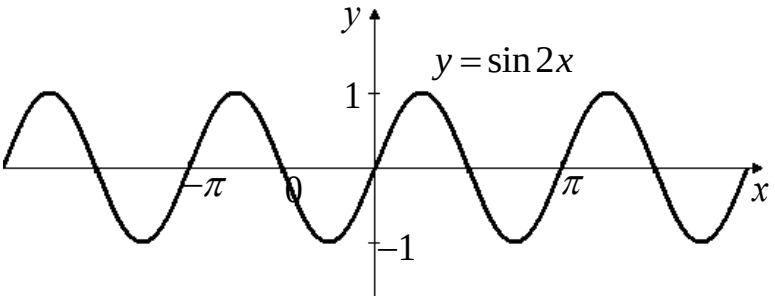



Рис. 35

*Контрольные вопросы*

1. Дайте определение отображения.
2. Что называется функцией?
3. Перечислите способы задания функции.
4. Как найти область определения функции?
5. Дайте определение сложной функции.
6. Дайте определение обратной функции.
7. Дайте определение четной (нечетной) функции.
8. Дайте определение периодической функции.
9. Дайте определение ограниченной функции.
10. Какие функции относятся к основным элементарным?
11. Какие функции называются элементарными?

# 3. ЧИСЛОВАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ И ЕЕ ПРЕДЕЛ

## 3.1. Понятие числовой последовательности

**Определение.** Если каждому из натуральных чисел $1, 2, 3, ..., n, ...$, ставится в соответствие по определенному закону некоторое число $x_n$, то бесконечное множество занумерованных чисел $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ называется числовой последовательностью или просто последовательностью.

Числа $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ называются членами последовательности, при этом $x_n$ называется общим членом последовательности.

Последовательность будем обозначать $\{x_n\}$. Последовательность можно представлять как частный случай функции, а именно функции натурального аргумента.

Последовательность может быть задана:

1) аналитически, т.е. формулой, по которой определяется общий член последовательности $x_n$ по значению $n$;

2) рекуррентно, т.е. задаются несколько первых членов последовательности и указывается правило, по которому находится каждый член последовательности через ему предшествующие.

**Пример**. Задана последовательность $\{x_n\}$, $x_n = \dfrac{1}{n^2}$ – формула общего члена, по ней можно получить любой член последовательности: $x_1 = 1$, $x_2 = \dfrac{1}{2^2}$, $x_3 = \dfrac{1}{3^2}$, … .

**Пример**. Задана последовательность $\{x_n\}$:

$$x_1 = 1,\ x_2 = -1,\ x_n = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + x_{n-2}\right),\ n = 3, 4, ...,\ x_3 = \frac{1}{2}(1-1) = 0,$$

$$x_4 = \frac{1}{2}(0-1),\ x_5 = \frac{1}{2}\left(0 - \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4},\ x_6 = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{8}.$$

Последовательность имеет начальные члены

$$1, -1, 0, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{3}{8}, ... .$$

**Определение.** Последовательность $\{x_n\}$ называется невозрастающей, если для любого натурального $n$ выполняется неравенство

$$x_n \geq x_{n+1},$$

и неубывающей, если для любого натурального $n$ выполняется неравенство

$$x_n \leq x_{n+1}.$$

Невозрастающие и неубывающие последовательности называются монотонными.

**Определение.** Числовая последовательность $\{x_n\}$ называется: ограниченной снизу, если существует такое число $M$, что для любого натурального $n$ выполняется неравенство

$$x_n \geq M,$$

и ограниченной сверху, если для $\forall n \in \mathbb{N}$

$$x_n \leq M.$$

Последовательность, ограниченная и снизу и сверху, называется ограниченной.

Например, последовательность $\{x_n\}$, $x_n = \frac{1}{n^2}$ ограничена, т.к. для всех ее членов выполняется неравенство $0 < x_n < 2$, т.е.

$$0 < \frac{1}{n^2} < 2, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Последовательность $\{x_n\}$, $x_n = n^2$ является ограниченной снизу, т.к. $x_n > 0$ для любого натурального $n$.

**Определение.** Будем называть графиком последовательности $\{x_n\}$ множество точек плоскости с координатами $(n; x_n)$, соединенных ломаной линией.

**Пример**. Построим график последовательности $\{x_n\}$, $x_n = \frac{5}{n}$ (рис. 37).

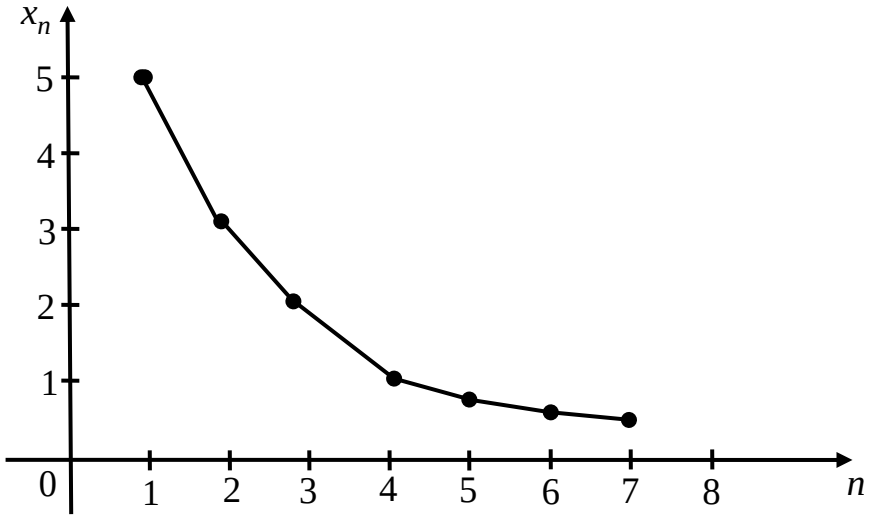



Рис. 37

### 3.2. Понятие предела последовательности

Рассмотрим последовательности:

1) $\{a_n\}$, $a_n = 2n$; 2) $\{b_n\}$, $b_n = (-1)^n$; 3) $\{c_n\}$, $c_n = \frac{n+2}{n}$.

1) При увеличении $n$ члены последовательности $\{a_n\}$ неограниченно возрастают (рис. 38).

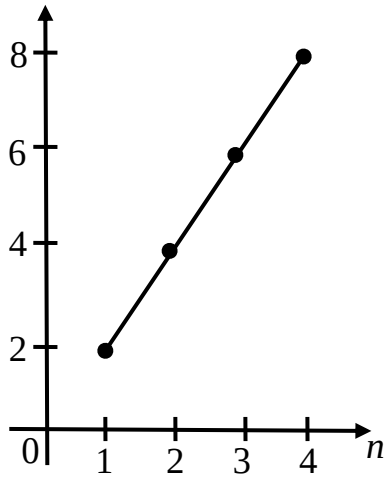



Рис. 38

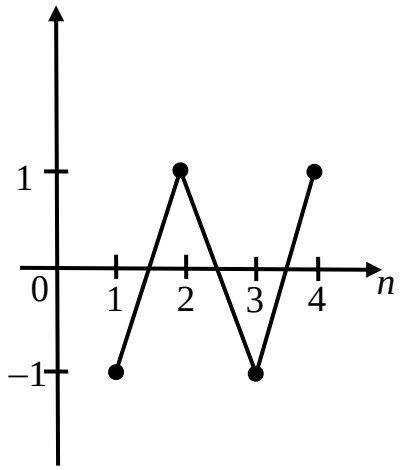



Рис. 39

2) При увеличении $n$ члены последовательности $\{b_n\}$ колеблются между –1 и 1 (рис. 39).

3) При увеличении $n$ члены последовательности $\{c_n\}$ неограниченно приближаются к 1 (рис. 40).

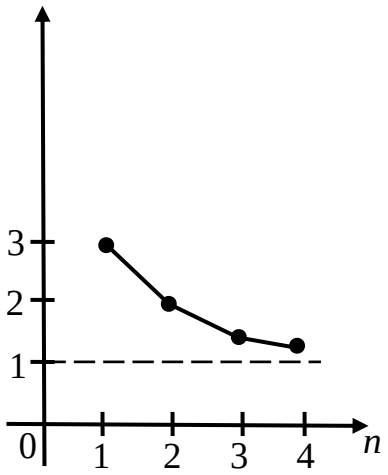



Рис. 40

Про такие последовательности, как $\{c_n\}$, говорят, что они имеют предел или сходятся, а число, к которому неограниченно приближаются члены последовательности (в примере 3 это число 1), называют пределом последовательности.

Уточним понятие сходящейся последовательности. Рассмотрим некоторую последовательность, члены которой при увеличении $n$ неограниченно приближаются к числу $b$, изобразим График такой последовательности (рис. 41).

Сформулируем более строго, что значит «члены последовательности неограниченно приближаются к $b$ при увеличении $n$». Это означает, что для любого положительного числа $\varepsilon$ график последовательности, начиная с некоторого звена ломаной линии, будет находиться внутри полосы шириной $2\varepsilon$, окружающей прямую $y = b$.

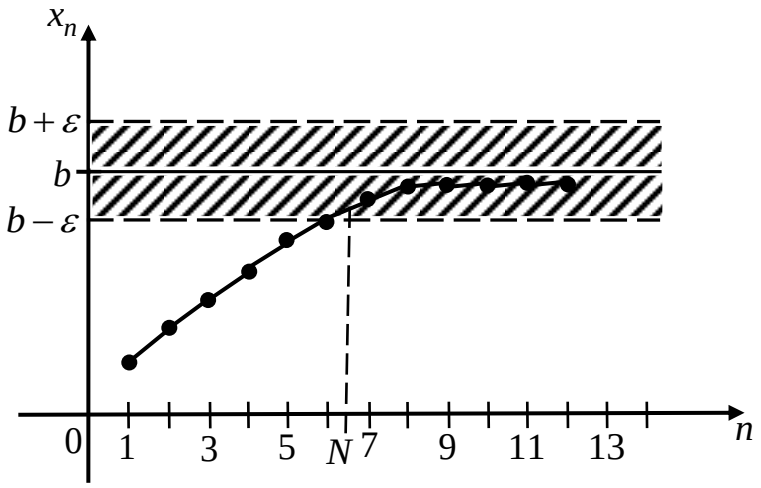



Рис. 41

Опишем формулой тот факт, что график последовательности находится внутри полосы. Это означает, что, начиная с некоторого номера $N$ для членов последовательности $\{x_n\}$ выполняются неравенства

$$b-\varepsilon < x_n < b+\varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < x_n - b < \varepsilon \Leftrightarrow |x_n - b| < \varepsilon .$$

Таким образом имеем два равносильных условия: «график последовательности $\{x_n\}$, начиная с некоторого звена, содержится внутри полосы шириной $2\varepsilon$»; «найдется такое значение $N$, что все члены последовательности $\{x_n\}$ с номерами $n$, большими чем $N$, удовлетворяют неравенству $|x_n - b| < \varepsilon$».

Теперь дадим строгое определение предела последовательности.

**Определение.** Число $b$ называется пределом последовательности $\{x_n\}$ $\left(b = \lim\limits_{n\to\infty} x_n\right)$, если для любого положительного числа $\varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ найдется такое натуральное число $N \in \mathbb{N}$, что для всех членов последовательности, имеющих номер больше, чем $N$ $(n > N)$, выполняется неравенство $|x_n - b| < \varepsilon$.

Краткая запись этого определения:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \ \forall n > N \ \ |x_n - b| < \varepsilon .$$

### 3.3. Примеры сходящихся последовательностей

**Пример**. Рассмотрим последовательность $\{x_n\}$, $x_n = \dfrac{2n}{n+1}$. Построим график этой последовательности (рис. 42).

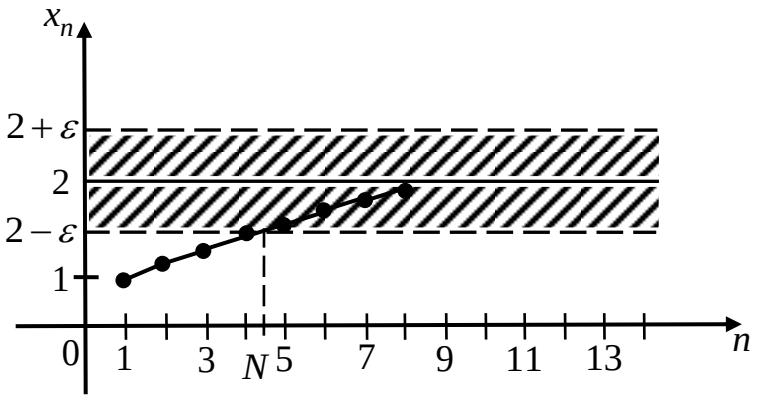



Рис. 42

На графике видим, что члены последовательности неограниченно приближаются к числу 2. Теперь докажем, что существует предел этой последовательности, равный числу 2.

Для доказательства существования предела необходимо для любого положительного числа $\varepsilon$ указать конкретно число $N$ такое, что для всех членов последовательности $\{x_n\}$, имеющих номер $n$ больше $N$, выполняется требуемое в определении неравенство, т.е. график последовательности попадает внутрь полосы шириной $2\varepsilon$, серединой которой является прямая $y=2$.

Возьмем произвольное положительное число $\varepsilon$, для существования предела, равного числу 2, необходимо выполнение неравенства

$$|x_n-2|<\varepsilon.$$

Найдем, для каких значений $n$ оно выполняется. Выпишем ряд равносильных неравенств:

$$|x_n-2|<\varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{2n}{n+1}-2\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{2n-2n-2}{n+1}\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{-2}{n+1}\right|<\varepsilon \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{n+1}<\varepsilon \Leftrightarrow n+1>\frac{2}{\varepsilon} \Leftrightarrow n>\frac{2}{\varepsilon}-1.$$

Если $\frac{2}{\varepsilon}-1<0$, то возьмем $N=1$. Иначе, $N=\left[\frac{2}{\varepsilon}-1\right]+1$ ($[a]$ – целая часть числа $a$). Таким образом нашли число $N$ такое, что для всех членов последовательности, имеющих номер $n>N$, выполняется требуемое неравенство, а значит, согласно определению, предел последовательности $\left\{\frac{2n}{n+1}\right\}$, равен 2.

**Пример**. Рассмотрим последовательность $\{x_n\}$, $x_n=2^{-n}$, покажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} 2^{-n}=0$.

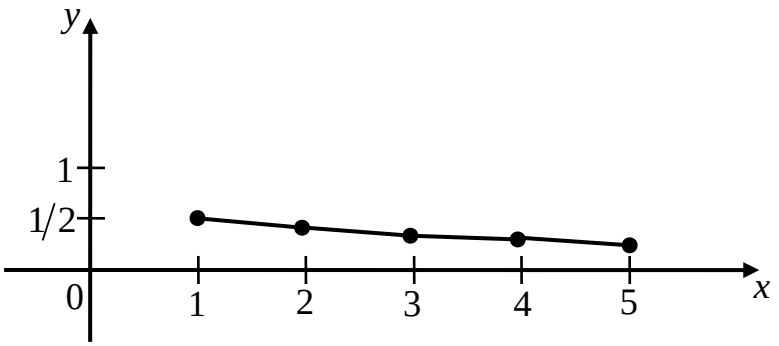



Рис. 43

На графике (рис. 43) видно, что члены последовательности неограниченно приближаются к нулю. Дадим строгое доказательство существования данного предела.

Зададим произвольное положительное число $\varepsilon$ и найдем конкретное число $N$ такое, что для всех $x_n$, имеющих номер $n$ больше $N$, выполняется неравенство $|x_n - 0| < \varepsilon$. Получим:

$$\left|2^{-n} - 0\right| < \varepsilon \;\Leftrightarrow\; 2^{-n} < \varepsilon \Leftrightarrow \log_2 2^{-n} < \log_2 \varepsilon \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -n < \log_2 \varepsilon \Leftrightarrow n > -\log_2 \varepsilon \Leftrightarrow n > \log_2 \frac{1}{\varepsilon}.$$

Если $\log_2 \frac{1}{\varepsilon} < 0$, то возьмем $N = 1$. Иначе, $N = \left[\log_2 \frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$ ($[a]$ – целая часть числа $a$). Найденное значение и есть нужное нам $N$, т.е. $N = \log_2 \frac{1}{\varepsilon}$. Для всех $n > N$ выполняется требуемое в определении предела неравенство, значит последовательность $x_n = 2^{-n}$ имеет предел, равный нулю.

### 3.4. Теорема Вейерштрасса

**Теорема.** *Если последовательность является монотонной и ограниченной, она имеет предел.*

Эту теорему мы примем без доказательства, заметив лишь, что она является одним из признаков существования предела. В ней указываются условия существования предела, но не дается метод его вычисления.

Рассмотрим на примере применение этой теоремы к доказательству существования предела последовательности.

**Пример**. Рассмотрим последовательность $\{x_n\}$, $x_n = \frac{2^n}{n!}$. Докажем, что эта последовательность имеет предел.

**Решение.** 1) Проверим, что она монотонна. Для этого сравним значения двух соседних членов последовательности $x_n$ и $x_{n+1}$, установив знак их разности.

$$x_n = \frac{2^n}{n!}, \quad x_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!},$$

$$x_n - x_{n+1} = \frac{2^n}{n!} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{2^n}{n!}\left(1 - \frac{2}{n+1}\right) = \frac{2^n}{n!} \cdot \frac{n+1-2}{n+1} =$$

$$= \frac{2^n(n-1)}{n!(n+1)} \geq 0 \text{ при всех } n = 1, 2, 3, \ldots .$$

Значит, при любом значении $n$ $x_n - x_{n+1} \geq 0$, т.е. $x_n \geq x_{n+1}$. Эта последовательность является невозрастающей.

2) Проверим, что эта последовательность ограничена. Все члены этой последовательности положительны, значит $x_n > 0$ при всех $n = 1, 2, 3, \ldots$ . Первый член последовательности $x_1$ равен числу 2. Т.к. последовательность невозрастающая, выполняются неравенства

$$x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq \ldots \geq x_n \geq \ldots .$$

Следовательно, $x_n \leq x_1 = 2$ для любого $n = 1, 2, 3, \ldots$ . Получили $0 < x_n \leq 2$ для любого $n = 1, 2, 3, \ldots$ . Последовательность ограничена и снизу, и сверху, значит является ограниченной и по теореме Вейерштрасса имеет предел.

*Контрольные вопросы*

1. Что называется числовой последовательностью?
2. Что называется пределом числовой последовательности?
3. Приведите примеры сходящихся числовых последовательностей.
4. Сформулируйте теорему Вейерштрасса.

# 4. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

## 4.1. Окрестность точки числовой прямой

В дальнейшем символом «$\omega$» будем обозначать либо точку $x_0$, либо «$+\infty$», либо «$-\infty$», либо «$\infty$».

**Определение.** Окрестностью точки $x_0$ числовой прямой будем называть любой интервал, содержащий эту точку, и обозначать его $O(x_0)$

**Определение.** Окрестностью «$+\infty$» будем называть любой бесконечный интервал вида $(a;+\infty)$, $a \in \mathbb{R}$ и обозначать $O(+\infty)$

**Определение.** Окрестностью «$-\infty$» будем называть любой бесконечный интервал вида $(-\infty;a)$, а $a \in \mathbb{R}$ и обозначать $O(-\infty)$

**Определение.** Окрестностью «$\infty$» будем называть объединение двух любых окрестностей «$+\infty$» и «$-\infty$» и обозначать $O(\infty)$

Символ $O(\omega)$ будет означать окрестность точки $\omega$, где «$\omega$» означает либо $x_0$, либо «$+\infty$», либо «$-\infty$», либо «$\infty$».

## 4.2. Определение предела функции

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $\omega$, за исключением быть может самой точки $\omega$.

**Определение.** Число $b$ называется пределом функции $f(x)$ при стремлении $x$ к $\omega$, если для любого положительного числа $\varepsilon$ найдется такая окрестность $O(\omega)$ точки $\omega$, что для всех значений $x$ из этой окрестности, за исключением самой точки $\omega$, выполняется неравенство

$$|f(x)-b|<\varepsilon.$$

Краткая запись определения предела функции:

$$\lim_{x\to\omega} f(x)=b \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists O(\omega)\ \forall x\in O(\omega),\ \ x\neq\omega\ \ |f(x)-b|<\varepsilon.$$

Геометрически существование предела функции $f(x)$ в точке $\omega$ означает, что для любого положительного числа $\varepsilon$ найдется такая окрестность $O(\omega)$, в которой график функции $f(x)$ попадает внутрь полосы шириной $2\varepsilon$, окружающей прямую $y=b$.

Доказательство существования предела функции $f(x)$ в точке $\omega$ сводится к нахождению для любого положительного числа $\varepsilon$ требуемой в определении окрестности $O(\omega)$.

**Пример**. Покажем, что $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2+x^2}{x^2}=1$.

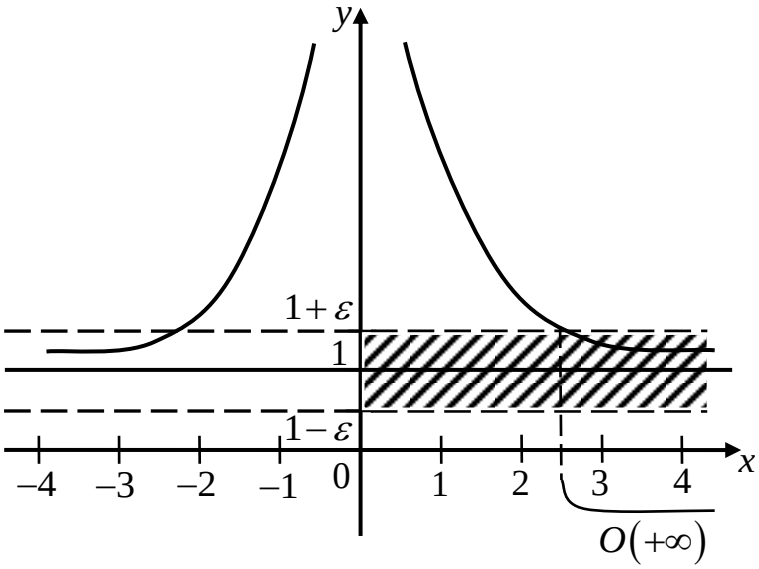



Рис. 44

На графике (рис. 44) видно, что для произвольно выбранного числа $\varepsilon$ нашлась окрестность $O(+\infty)$, для всех точек которой график содержится внутри полосы шириной $2\varepsilon$, окружающей прямую $y=1$. Найдем эту окрестность аналитически. Это и будет доказательством существования данного предела.

Выбрав произвольное положительное число $\varepsilon$, рассмотрим неравенство $\left|f(x)-b\right|<\varepsilon$:

$$\left|\frac{2+x^2}{x^2}-1\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{2}{x^2}\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \frac{2}{x^2}<\varepsilon \Leftrightarrow x^2>\frac{2}{\varepsilon} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x>\sqrt{\frac{2}{\varepsilon}} \Rightarrow x\in\left(\sqrt{\frac{2}{\varepsilon}};+\infty\right)=O(+\infty).$$

Это и означает, что существует $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2+x^2}{x^2}=1$.

**Пример**. Покажем, что $\lim\limits_{x\to 2}\left(3-\dfrac{1}{2}x\right)=2$.

Для произвольного положительного числа $\varepsilon$ (рис. 45) рассмотрим неравенство $\left|f(x)-2\right|<\varepsilon$ и найдем удовлетворяющие этому неравенству значения $x$:

$$\left|\left(3-\frac{1}{2}x\right)-2\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \left|1-\frac{1}{2}x\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{1}{2}x-1\right|<\varepsilon \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\varepsilon<\frac{1}{2}x-1<\varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon+1<\frac{1}{2}x<\varepsilon+1 \Leftrightarrow 2-2\varepsilon<x<2+2\varepsilon \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ x \in (2-2\varepsilon; 2+2\varepsilon) = O(2).$$

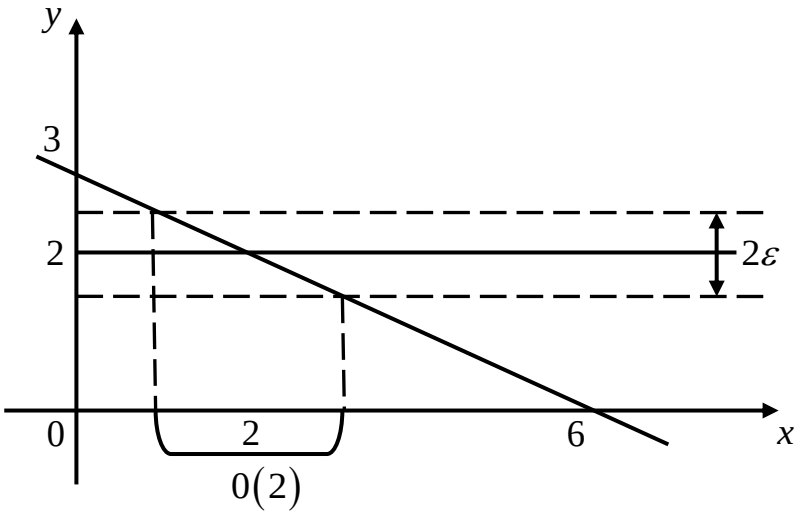



Рис. 45

Итак, мы нашли для произвольного положительного $\varepsilon$ окрестность $O(2)$, в которой выполняется требуемое неравенство, это и означает, что данный предел существует и равняется числу 2.

**Замечание.** В определении предела функции $f(x)$ при стремлении $x$ к $\omega$ выполнение неравенства $|f(x)-b|<\varepsilon$ предусмотрено для всех $\omega$ из некоторой окрестности $O(\omega)$, само значение $x$, равное $\omega$, исключается $(x \neq \omega)$. Поэтому значение предела функции $f(x)$ при стремлении $x$ к $\omega$ не зависит от того, определена ли функция $f(x)$ в самой точке $\omega$, а если определена, то какое значение принимает в этой точке.

**Пример**. Рассмотрим функцию $f(x)$, заданную следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} 3-\dfrac{1}{2}x & \text{при } x \neq 2, \\ 4 & \text{при } x = 2. \end{cases}$$

Построим график этой функции (рис. 46).

Предел данной функции $f(x)$ при стремлении $x$ к 2 равен числу 2, т.к. все точки графика из окрестности $O(2)$, за исключением самой точки $x=2$, попадают внутрь полосы шириной $2\varepsilon$, окружающей прямую $y=2$.

Это и соответствует определению предела функции в точке. Таким образом, изменение значения функции в самой точке $x=2$ не повлияло на значение предела функции.

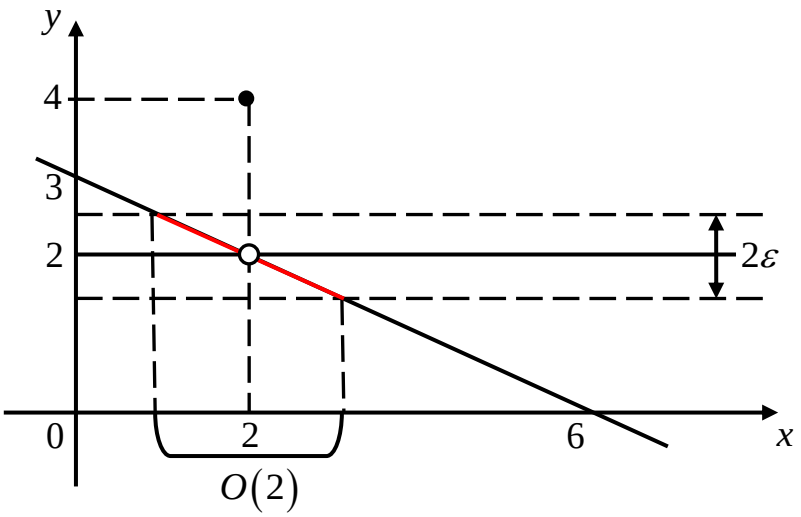



Рис. 46

### 4.3. Основные свойства функции, имеющей предел

1. Единственность предела. Если функция $f(x)$ имеет предел при $x \to \omega$, то этот предел единственный.

2. Ограниченность функции, имеющей предел. Если функция $f(x)$ имеет предел при $x \to \omega$, то она ограничена в некоторой окрестности $\omega$.

$$\lim_{x\to\omega} f(x) = b \Rightarrow \exists O(\omega), \quad f(x) \text{ ограничена в } O(\omega).$$

3. Пусть функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ имеют при $x \to \omega$ пределы $b_1$ и $b_2$ соответственно. Тогда:

1) существует предел их суммы (разности) и $\lim\limits_{x\to\omega}\left(f_1(x) \pm f_2(x)\right) = b_1 \pm b_2$;

2) существует предел их произведения и $\lim\limits_{x\to\omega}\left(f_1(x)\cdot f_2(x)\right) = b_1 \cdot b_2$;

3) существует предел их частного, если $b_2 \neq 0$ и $\lim\limits_{x\to\omega}\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} = \dfrac{b_1}{b_2}$.

4. Пусть функция $f(x)$ в некоторой окрестности $O(\omega)$ точки $\omega$ неотрицательна и пусть существует $\lim\limits_{x\to\omega} f(x) = b$. Тогда и предел $b$ является числом неотрицательным.

$$\exists O(\omega), \quad \forall x \in O(\omega) \quad (x \neq \omega) \quad f(x) \geq 0, \quad \exists \lim_{x\to\omega} f(x) = b \Rightarrow b \geq 0.$$

5. Сжатая функция. Пусть функции $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ определены в некоторой окрестности точки $\omega$ (за исключением, быть может, самой точки $\omega$) и в этой окрестности удовлетворяют неравенству

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x),$$

при этом функции $g(x)$ и $h(x)$ имеют предел при $x \to \omega$, равный одному и тому же числу $b$. Тогда функция $f(x)$ имеет предел, равный этому же числу.

$$\exists \lim_{x\to\omega} g(x) = b, \quad \exists \lim_{x\to\omega} h(x) = b, \quad g(x) \le f(x) \le h(x)$$
$$\forall x \in O(\omega) \ \ (x \ne \omega) \Leftrightarrow \exists \lim_{x\to\omega} f(x) = b.$$

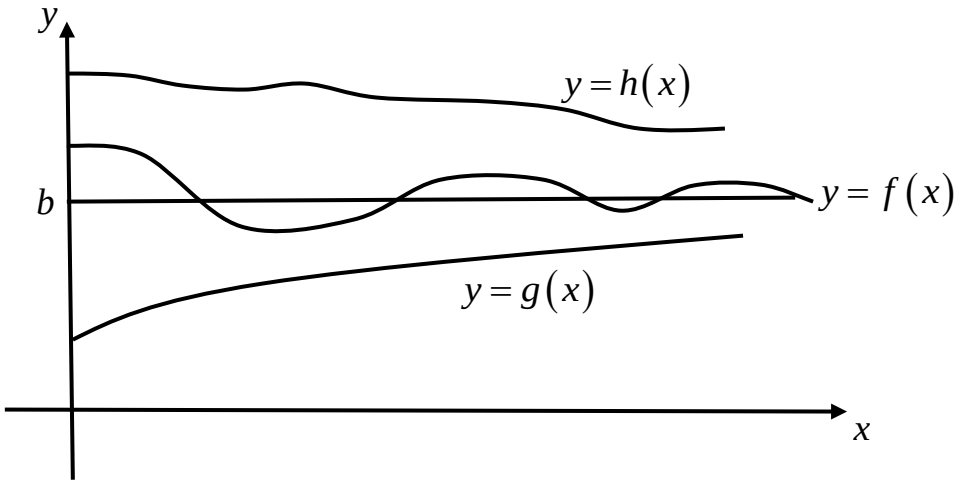



Рис. 47

### 4.4. Бесконечно малые функции

**Определение.** Функция $f(x)$ называется бесконечно малой при стремлении $x$ к $\omega$, если существует предел $f(x)$ при $x \to \omega$, равный нулю.

$$f(x) - \text{б.м. при } x \to \omega \Leftrightarrow \lim_{x\to\omega} f(x) = 0.$$

Это означает:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists O(\omega) \ \forall x \in O(\omega), \quad x \ne \omega, \quad |f(x)| < \varepsilon.$$

**Пример**. Функция $y = x^3$ является бесконечно малой при $x \to 0$.

Зададим произвольное положительное число $\varepsilon$ (рис. 48) и найдем окрестность точки $\omega = 0$, в которой выполняется неравенство $|f(x)| < \varepsilon$.

Имеем ряд равносильных неравенств:

$$|f(x)| < \varepsilon \Leftrightarrow |x^3| < \varepsilon \Leftrightarrow |x| < \sqrt[3]{\varepsilon} \Leftrightarrow -\sqrt[3]{\varepsilon} < x < \sqrt[3]{\varepsilon} \Leftrightarrow$$
$$x \in \left(-\sqrt[3]{\varepsilon}, \sqrt[3]{\varepsilon}\right) = O(0).$$

Для произвольного $\varepsilon > 0$ нашли требуемую окрестность точки $x = 0$, $O(0) = \left(-\sqrt[3]{\varepsilon}, \sqrt[3]{\varepsilon}\right)$, это и доказывает, что функция $y = x^3$ является бесконечно малой при $x \to 0$.

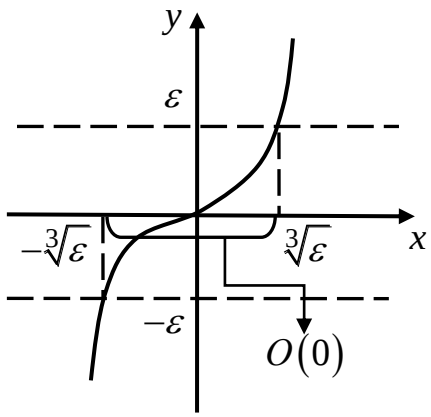



Рис. 48

**Замечание.** Говорить о том, что функция $f(x)$ является бесконечно малой, имеет смысл, лишь указав, как при этом изменяется ее аргумент.

Так, например, функция $y = x^3$ является бесконечно малой при $x \to 0$; неограниченно возрастает при $x \to +\infty$; имеет предел равный 1 при $x \to 1$, а значит является ограниченной в окрестности точки $x = 1$.

***Основные свойства бесконечно малых***

1. Пусть функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ являются бесконечно малыми при $x \to \omega$. Тогда их сумма тоже бесконечно малая функция при $x \to \omega$.

$$\alpha(x) \text{ – б.м. при } x \to \omega, \quad \beta(x) \text{ – б.м. при } x \to \omega \Rightarrow$$
$$\alpha(x) + \beta(x) \text{ – б.м. при } x \to \omega.$$

2. Пусть функция $\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x \to \omega$, а $f(x)$ ограничена в некоторой окрестности точки $\omega$. Тогда их произведение $\alpha(x) \cdot f(x)$ – бесконечно малая при $x \to \omega$.

**Пример**. Найти $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sin x}{x}$.

**Решение.** Заметим, что функция $y = \sin x$ при $x \to \infty$ не имеет предела, ее значения с периодичностью $2\pi$ изменяются от $-1$ до $+1$. Но эта функция является ограниченной:

$$|\sin x| \le 1 \quad \forall x \in (-\infty; \infty).$$

Функция $y = \dfrac{1}{x}$ является бесконечно малой при $x \to \infty$, т.к. для любого $\varepsilon > 0$ имеем:

$$\left|\frac{1}{x}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow |x| > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow x > \frac{1}{\varepsilon}, \quad x < -\frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow$$

$x \in \left(-\infty; -\frac{1}{\varepsilon}\right) \cup \left(\frac{1}{\varepsilon}; \infty\right) = O(\infty)$, т.е. для произвольного $\varepsilon > 0$ мы нашли окрестность бесконечно удаленной точки, в которой $\left|\frac{1}{x}\right| < \varepsilon$, значит $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Поэтому $\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{x} \cdot \sin x$ – произведение бесконечно малой $\frac{1}{x}$ при $x \to \infty$ на ограниченную функцию $\sin x$ по свойству 2 является бесконечно малой при $x \to \infty$, т.е. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$.

## 4.5. Бесконечно большие функции, их связь с бесконечно малыми

**Определение.** Функция $f(x)$ называется бесконечно большой при $x \to \omega$, если для любого положительного числа $M$ найдется окрестность $O(\omega)$ такая, что для всех $x$ из этой окрестности $(x \neq \omega)$ выполняется неравенство $|f(x)| > M$.

Тот факт, что $f(x)$ является бесконечно большой при $x \to \omega$, записывается так:

$$\lim_{x\to\omega} f(x) = \infty.$$

Это равенство следует понимать как обозначение бесконечно большой функции при $x \to \omega$.

**Пример**. Покажем, что функция $y = 2^x$ является бесконечно большой при $x \to +\infty$.

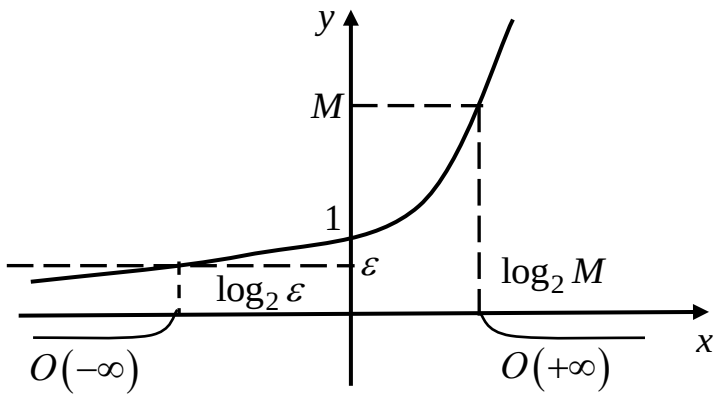



Рис. 49

На графике (рис. 49) видно существование требуемой в определении окрестности $O(+\infty)$, найденной для числа $M$. Найдем ее аналитически.

Выберем произвольно положительное число $M$, найдем, для каких $x$ выполняется неравенство $|f(x)| > M$:

$$\left|2^x\right| > M \;\Leftrightarrow\; 2^x > M \;\Leftrightarrow\; x > \log_2 M \;\Leftrightarrow$$
$$x \in \left(\log_2 M; +\infty\right) = O\left(+\infty\right).$$

Нашли окрестность $O\left(+\infty\right) = \left(\log_2 M; +\infty\right)$, в которой для всех $x$ выполняется неравенство $\left|2^x\right| > M$, это и доказывает, что функция $y = 2^x$ является бесконечно большой при $x \to +\infty$, т.е. $\lim\limits_{x\to+\infty} 2^x = \infty$.

Заметим, что при $x \to -\infty$ функция $y = 2^x$ является бесконечно малой. Выберем произвольное $\varepsilon > 0$, найдем окрестность $O\left(-\infty\right)$, в которой $\left|f\left(x\right)\right| < \varepsilon$:

$$\left|2^x\right| < \varepsilon \;\Leftrightarrow\; 2^x < \varepsilon \;\Leftrightarrow\; x < \log_2 \varepsilon \;\Leftrightarrow\; x \in \left(-\infty; \log_2 \varepsilon\right),$$

т.е. для произвольного $\varepsilon > 0$ нашли окрестность $O\left(-\infty\right) = \left(-\infty; \log_2 \varepsilon\right)$, в которой $\left|2^x\right| < \varepsilon$, значит $2^x$ – бесконечно малая при $x \to -\infty$, т.е. $\lim\limits_{x\to-\infty} 2^x = 0$.

**Замечание 1.** Следует различать понятия бесконечно большой функции и неограниченной функции.

Рассмотрим функцию $f\left(x\right) = x\sin x$. График изображен на рис. 50.

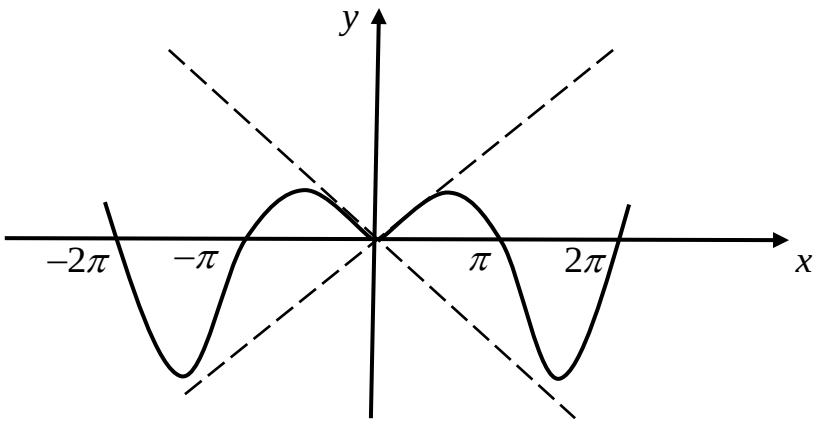



Рис. 50

При $x \to \infty$ эта функция является неограниченной, но не является бесконечно большой.

**Замечание 2.** Функцию $f\left(x\right)$ называют положительной (отрицательной) бесконечно большой при $x \to \omega$, если она является бесконечно большой при $x \to \omega$ и в некоторой окрестности точки $\omega$ положительна (отрицательна). Обозначают:

$\lim\limits_{x\to\omega} f\left(x\right) = +\infty \;\Leftrightarrow\; f\left(x\right)$ – положительная бесконечно большая,

$$\lim_{x\to\omega} f(x) = -\infty \Leftrightarrow f(x) \text{ – отрицательная бесконечно большая.}$$

В рассмотренном выше (на стр. 39) примере $y = 2^x$ является положительной бесконечно большой при $x \to +\infty$.

### *Связь между бесконечно большими и бесконечно малыми функциями*

**Теорема 1.** *Если функция $f(x)$ является бесконечно большой при $x \to \omega$, то функция $\dfrac{1}{f(x)}$ является бесконечно малой при $x \to \omega$.*

$$\lim_{x\to\omega} f(x) = \infty \Rightarrow \lim_{x\to\omega} \frac{1}{f(x)} = 0.$$

**Доказательство.** Возьмем произвольное положительное число $\varepsilon$, обозначим $M = \dfrac{1}{\varepsilon}$. По условию теоремы $\lim\limits_{x\to\omega} f(x) = \infty$, значит найдется окрестность $O(\omega)$, для всех точек которой, отличных от $\omega$, выполняется неравенство

$$|f(x)| > M \quad \forall x \in O(\omega) \quad (x \neq \omega).$$

Но тогда для всех $\forall x \in O(\omega)$ $(x \neq \omega)$ имеем:

$$\left|\frac{1}{f(x)}\right| = \frac{1}{|f(x)|} < \frac{1}{M} = \varepsilon, \quad \forall x \in O(\omega) \quad (x \neq \omega).$$

Это и означает, что $\lim\limits_{x\to\omega} \dfrac{1}{f(x)} = 0$, т.е. функция $f(x)$ является бесконечно малой при $x \to \omega$. Теорема доказана.

**Теорема 2.** *Если функция $f(x)$ является бесконечно малой при $x \to \omega$ и отличной от нуля в некоторой окрестности $O(\omega)$ точки $\omega$, то функция $\dfrac{1}{f(x)}$ является бесконечно большой при $x \to \omega$.*

$$\lim_{x\to\omega} f(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to\omega} \frac{1}{f(x)} = \infty.$$

**Доказательство.** Возьмем произвольное положительное число $M$, обозначим $\varepsilon = \dfrac{1}{M}$. По условию теоремы $\lim\limits_{x\to\omega} f(x) = 0$, значит, найдется окрестность $O_1(\omega)$, для всех точек которой, отличных от $\omega$, выполняется неравенство

$$|f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in O_1(\omega) \quad (x \neq \omega).$$

Выберем общую часть окрестностей $O(\omega)$ и $O_1(\omega)$, обозначим ее $O_2(\omega)$. В этой окрестности $f(x)$ не обращается в нуль, и можем рассмотреть функцию $\frac{1}{f(x)}$. Для всех точек из $O_2(\omega)$, отличных от $\omega$, имеем:

$$\left|\frac{1}{f(x)}\right| = \frac{1}{|f(x)|} > \frac{1}{\varepsilon} = \varepsilon, \quad \forall x \in O_2(\omega) \quad (x \neq \omega).$$

Таким образом мы нашли такую окрестность $O_2(\omega)$, в которой для всех $x$ $(x \neq \omega)$ выполняется неравенство $\left|\frac{1}{f(x)}\right| > M$. Это и означает, что $\frac{1}{f(x)}$ является бесконечно большой при $x \to \omega$. Теорема доказана.

*Контрольные вопросы*

1. Дайте определение предела функции.
2. Приведите основные свойства функций, имеющих предел.
3. Дайте определение бесконечно малой функции и приведите их свойства.
4. Дайте определение бесконечно большой функции.
5. Как связаны бесконечно большие и бесконечно малые функции?

# 5. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕДЕЛОВ, РАСКРЫТИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ

## 5.1. Раскрытие простейших неопределенностей

**Замечание.** В теме «Непрерывность функции» будет доказано, что если функция $f(x)$ является элементарной функцией и $f(x)$ определена в точке $x_0$, т.е. существует значение $f(x_0)$, то предел $f(x)$ при стремлении $x$ к $x_0$ равен $f(x_0)$, т.е.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

**Пример**. Применяя теоремы о пределе суммы, произведения и частного функций, имеющих предел, находим предел:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{\ln x+3}{e^{x-1}-\cos\pi x}\right)^{4-x^2} = \left(\frac{\ln 1+3}{e^{1-1}-\cos\pi}\right)^{4-1} = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8}.$$

**Определение.** Неопределенностью или неопределенным выражением называется выражение, предел которого не может быть найден без дополнительных преобразований только по известным пределам функций, составляющих это выражение.

Пусть функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ являются бесконечно малыми при стремлении $x$ к $\omega$: $\lim\limits_{x\to\omega}\alpha(x)=0$, $\lim\limits_{x\to\omega}\beta(x)=0$. Предел их частного при стремлении $x$ к $\omega$ называется неопределенностью типа $\left[\frac{0}{0}\right]$.

Рассмотрим примеры нахождения пределов такого типа, примеры раскрытия неопределенностей типа $\left[\frac{0}{0}\right]$.

**Пример**. $\alpha(x)=\frac{1}{x+1}$, $\beta(x)=\frac{1}{x^2+1}$ – бесконечно малые при $x\to+\infty$.

$$\lim_{x+\infty}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x^2+1}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{x+1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x+\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} = +\infty.$$

Числитель и знаменатель дроби разделили на $x$.

$$\lim_{x+\infty}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x^2+1}}{\frac{1}{x+1}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = 0.$$

Числитель и знаменатель дроби разделили на $x^2$.

**Пример**. $\alpha(x)=\dfrac{\sin x}{x}$, $\beta(x)=\dfrac{1}{x}$ – бесконечно малые при $x\to+\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{\sin x}{x}}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x\cdot x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sin x$ – этот предел не существует.

Всего встречается семь видов неопределенностей:

$$\left[\frac{0}{0}\right],\ \left[\frac{\infty}{\infty}\right],\ [0\cdot\infty],\ [\infty-\infty],\ \left[1^{\infty}\right],\ \left[0^{0}\right],\ \left[\infty^{0}\right].$$

Будем называть раскрытием неопределенности решение вопроса о существовании предела и его вычисление в случае существования.

### *Раскрытие неопределенности* $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$

Пусть $P_m(x)$ и $Q_n(x)$ – многочлены, тогда предел их отношения при стремлении $x$ к $\infty$ есть неопределенность вида $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right].$$

Для раскрытия такой неопределенности нужно числитель и знаменатель дроби разделить на старшую степень переменной $x$, содержащуюся в знаменателе этой дроби

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-5x+11}{3x^2+x+4}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{x^2}{x^2}-\frac{5x}{x^2}+\frac{11}{x^2}}{\frac{3x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}+\frac{4}{x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\frac{5}{x}+\frac{11}{x^2}}{3+\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}}=\dfrac{1}{3}$, т.к.

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{11}{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4}{x^2}=0$.

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+2x-7}{x^2+3x+21}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{4x^3}{x^2}+\frac{2x}{x^2}-\frac{7}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{3x}{x^2}+\frac{21}{x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x+\frac{2}{x}-\frac{7}{x^2}}{1+\frac{3}{x}+\frac{21}{x^2}}=\infty$.

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+3}{2x^2-x-3}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{2x}{x^2}+\frac{3}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2}-\frac{x}{x^2}-\frac{3}{x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}{2-\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}}=0$.

Эти примеры помогают сделать вывод:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\ldots}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, & \text{если } m=n,\\ 0, & \text{если } m<n,\\ \infty, & \text{если } m>n.\end{cases}$$

Раскрывая неопределенность $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ в случае, когда числитель или знаменатель содержат иррациональные выражения, надо вынести за знак корня старшую степень переменной $x$, а затем разделить числитель и знаменатель на старшую степень $x$, содержащуюся в знаменателе дроби.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3-x-4}+5x^2+1}{3x+\sqrt{2x^4+3x+9}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x\cdot\sqrt[3]{1-\frac{1}{x^2}-\frac{4}{x^3}}+5x^2+1}{3x+x^2\cdot\sqrt{2+\frac{3}{x^3}+\frac{9}{x^4}}}=$$

(разделим числитель и знаменатель дроби на $x^2$)

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}\cdot\sqrt[3]{1-\frac{1}{x^2}-\frac{4}{x^3}}+5+\frac{1}{x^2}}{\frac{3}{x}+\sqrt{2+\frac{3}{x^3}+\frac{9}{x^4}}}=\frac{5}{\sqrt{2}}.$$

***Раскрытие неопределенности*** $\left[\frac{0}{0}\right]$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\left[\frac{0}{0}\right].$$

В этом случае число $x_0$ является корнем многочленов $P_m(x)$ и $Q_n(x)$ и для раскрытия неопределенности надо сократить числитель и знаменатель дроби на $(x-x_0)$, предварительно разложив многочлены на множители.

**Пример**. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2+2x}{x^3-2x^2-5x+6}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=$

$$=\lim_{x\to-2}\frac{x(x+2)}{(x-1)(x+2)(x-3)}=\lim_{x\to-2}\frac{x}{(x-1)(x-3)}=\frac{-2}{(-3)(-5)}-\frac{2}{15}.$$

Рассмотрим предел $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\left[\dfrac{0}{0}\right]$, где одна из функций $f(x)$ или $g(x)$, или обе являются иррациональными выражениями. Надо также сократить числитель и знаменатель дроби на $(x-x_0)$, но предварительно переведя иррациональность из числителя в знаменатель или наоборот.

**Пример**. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x+7}-3}{x^2+x-2}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(\sqrt{2x+7}-3\right)\left(\sqrt{2x+7}+3\right)}{\left(x^2+x-2\right)\left(\sqrt{2x+7}+3\right)}=$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{2(x-1)}{(x-1)(x+2)\left(\sqrt{2x+7}+3\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{2}{(x+2)\left(\sqrt{2x+7}+3\right)}=\frac{2}{3\cdot 6}=\frac{1}{9}.$$

**Пример**. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2-\sqrt{x+5}}{\sqrt[3]{x}+1}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{\left(2-\sqrt{x+5}\right)\left(2+\sqrt{x+5}\right)}{\left(\sqrt[3]{x}+1\right)\left(2+\sqrt{x+5}\right)}=\lim_{x\to -1}\frac{4-x-5}{\left(2+\sqrt{x+5}\right)\left(\sqrt[3]{x}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{-(x+1)\left(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1\right)}{\left(2+\sqrt{x+5}\right)\left(\sqrt[3]{x}+1\right)\left(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1\right)}=\lim_{x\to -1}\frac{-(x+1)\left(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1\right)}{\left(2+\sqrt{x+5}\right)(x+1)}=$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1}{2+\sqrt{x}+5}=\frac{1+1+1}{2+2}=\frac{3}{4}.$$

### *Раскрытие неопределенности вида* $[\infty-\infty]$

Неопределенность вида $[\infty-\infty]$, создаваемая разностью иррациональных выражений при стремлении $x$ к $\infty$, раскрывается таким же переводом иррациональности из числителя в знаменатель.

**Пример**. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2-3x+5}-\sqrt{x^2+1}\right)=[\infty-\infty]=$

$$=\lim_{x\to +\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-3x+5}-\sqrt{x^2+1}\right)\left(\sqrt{x^2-3x+5}+\sqrt{x^2+1}\right)}{\sqrt{x^2-3x+5}+\sqrt{x^2+1}}=$$

$$=\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2-3x+5-x^2-1}{\sqrt{x^2-3x+5}+\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to +\infty}\frac{-3x+4}{x\cdot\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}}+x\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=$$

$$=\lim_{x\to +\infty}\frac{-3+\frac{4}{x}}{\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=-\frac{3}{2}.$$

## 5.2. Первый замечательный предел. Раскрытие тригонометрических неопределенностей

Докажем, что

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Этот предел носит название «первый замечательный предел» и применяется при раскрытии тригонометрических неопределенностей вида $\left[\frac{0}{0}\right]$.

Построим на плоскости круг радиуса $R$ (рис. 51), угол, равный $x$, $0<x<\frac{\pi}{2}$. При $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ $\sin x>0$.

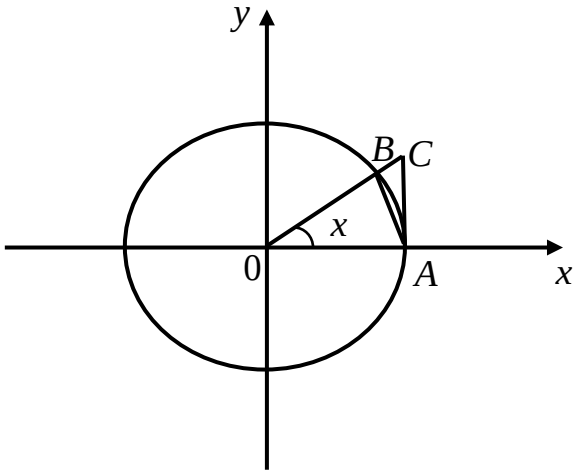



Рис. 51

Сравним площади треугольника $OAB$, сектора $OAB$ и треугольника $OAC$:

$$S_{\Delta OAB}<S_{\text{сект } OAB}<S_{\Delta OAC}.$$

Выразим площади этих фигур.

$$S_{\Delta OBA}=\frac{1}{2}OA\cdot OB\cdot\sin x=\frac{R^2}{2}\sin x,$$

$$S_{\text{сект } OBA}=\frac{x}{2}\cdot OA^2=\frac{x}{2}R^2,$$

$$S_{\Delta OCA}=\frac{1}{2}OA\cdot AC=\frac{1}{2}R\cdot R\operatorname{tg}x=\frac{1}{2}R^2\operatorname{tg}x,$$

$$\frac{R^2}{2}\sin x<\frac{x}{2}R^2<\frac{1}{2}R^2\operatorname{tg}x,$$

$$\sin x<x<\frac{\sin x}{\cos x}.$$

Разделим все части неравенства на положительный множитель $\sin x$:

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x},$$

для обратных величин получим неравенство

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x.$$

Неравенство верно и для отрицательных значений аргумента $x$, т.к $\frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{\sin x}{x}$, $\cos(-x) = \cos x$, т.е. неравенство справедливо для всех $x$, удовлетворяющих условию $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$.

Кроме того, $\lim\limits_{x\to 0} 1 = 1$, $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$ т.е. «крайние» функции полученного неравенства имеют при стремлении $x$ к нулю один и тот же предел, равный 1. По теореме о сжатой функции «средняя» функция имеет такой же предел, при стремлении $x$ к 0, т.е.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

**Следствия.**

1) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = 1.$

2) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\arcsin x} = \left[\frac{0}{0}\right].$

Сделаем замену переменной: $\arcsin x = t$; $x = \sin t$; $t \to 0$ при $x \to 0$. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\arcsin x} = \lim\limits_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1.$

3) Аналогично доказывается, что $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{arctg} x} = 1$, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1.$

4) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \left[1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2}\right] = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = 2\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\frac{x^2}{4} \cdot 4} =$

$$= 2\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 \cdot \frac{1}{4} = 2 \cdot 1^2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2} \text{ или } \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}}=1.$$

**Пример**. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}\cdot 5=5.$

Заметим, что для любого значения $m$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin mx}{x}=m$.

Аналогично можно доказать, что $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} nx}{x}=n$.

**Пример**. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\operatorname{tg} 7x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 5x}{x}}{\frac{\operatorname{tg} 7x}{x}}=\frac{5}{7}.$

**Пример**. $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{\sin 4x}{\sin 5x}=\left[\frac{0}{0}\right].$

Важно заметить, что здесь $x$ стремится к $\pi$, а не к нулю. Чтобы воспользоваться первым замечательным пределом для раскрытия этой неопределенности, сделаем замену переменной: $t=x-\pi$, новая переменная $t$ стремится к нулю при $x\to\pi$.

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin 4x}{\sin 5x}=\begin{bmatrix} t=x-\pi \\ x=t+\pi \\ t\to 0\end{bmatrix}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin(4t+4\pi)}{\sin(5t+5\pi)}=\begin{bmatrix}\text{по формулам} \\ \text{приведения}\end{bmatrix}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\sin 4t}{-\sin 5t}=-\lim_{t\to 0}\frac{\frac{\sin 4t}{t}}{\frac{\sin 5t}{t}}=-\frac{4}{5}.$$

### 5.3. Второй замечательный предел. Раскрытие неопределенности $\left[1^{\infty}\right]$

Рассмотрим показательную функцию $y=e^x$, которая обладает тем свойством, что касательная к ее графику в точке пересечения с осью $Oy$, составляет с координатной осью $Ox$ угол $45°$. Построим ее график (рис. 52).

Возьмем произвольное значение $x$, обозначим на графике точку $B$ с координатами $\left(x;\, e^x\right)$.

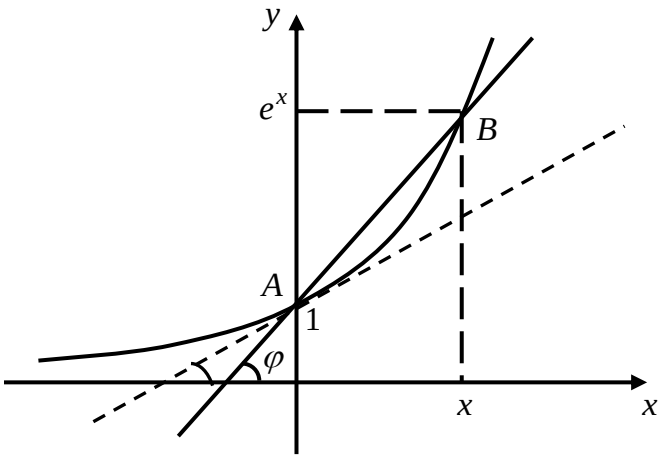


Рис. 52

Проведем через точки $A(0;1)$ и $B$ секущую, найдем тангенс угла $\varphi$ наклона секущей к положительному направлению оси $Ox$:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{e^x - 1}{x}.$$

Устремим $x$ к нулю. При этом секущая $AB$ будет стремиться к предельному положению, являющемуся касательной к графику в точке $A$.

При этом угол наклона секущей будет стремиться к углу наклона касательной к оси $Ox$, а значит и значение тангенса угла $\varphi$ будет стремиться к значению тангенса угла наклона касательной, т.е. к единице:

$$\lim_{x\to 0} \operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1.$$

Получили

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Рассмотрим следствия этого предела.

**Следствие 1.** Докажем, что предел $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \begin{bmatrix} \ln(1+x) = t \\ 1 + x = e^t \\ x = e^t - 1 \\ t \to 0 \text{ при } x \to 0 \end{bmatrix} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{e^t - 1} = 1.$$

Итак, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

Кроме того, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log_a(1+x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x\ln a} = \dfrac{1}{\ln a}$.

**Следствие 2.** Докажем, что $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$.

Преобразуем выражение в пределе $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$:

$$\frac{\ln(1+x)}{x}=\frac{1}{x}\ln(1+x)=\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=1=\ln e.$$

$$\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln\left(\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}\right),$$

$$\ln\left(\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}\right)=\ln e\ \Rightarrow\ \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e.$$

Этот предел раскрывает неопределенность вида $\left[1^{\infty}\right]$ и носит название «второй замечательный предел». Если в этом пределе заменить переменную, обозначив $\dfrac{1}{x}=t$, получится другая форма второго замечательного предела: $\lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{t}\right)^{t}=e$.

В более общем виде при $x\to\omega$: $\lim\limits_{\alpha(x)\to 0}\left(1+\alpha(x)\right)^{\frac{1}{\alpha(x)}}=e$.

**Следствие 3.** Найдем $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}$, дающий неопределенность вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$.

Используя логарифмическое тождество, представим $a^x=e^{\ln a^x}=e^{x\ln a}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln a}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln a}-1}{x\ln a}\ln a=\begin{bmatrix} x\ln a=t \\ t\to 0 \text{ при } x\to 0\end{bmatrix}=$$

$$=\ln a\ \lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t}=\ln a.$$

***Раскрытие неопределенности вида*** $\left[1^{\infty}\right]$

Пусть дан $\lim\limits_{x\to\omega}f(x)^{g(x)}=\left[1^{\infty}\right]$, т.е. $\lim\limits_{x\to\omega}f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to\omega}g(x)=\infty$.

Для раскрытия неопределенности часто можно преобразовать функцию $f(x)$, прибавляя и вычитая единицу, чтобы затем использовать один из полученных пределов.

**Пример**. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-3}{2x+1}\right)^{4x+5}=\left[1^{\infty}\right]=$

$$=\{\text{прибавим и вычтем в основании } 1\}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\left(\frac{2x-3}{2x+1}-1\right)\right)^{4x+5}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-4}{2x+1}\right)^{4x+5}=$$

$$=\left\{\alpha(x)=\frac{-4}{2x+1}\to 0 \text{ при } x\to\infty\Rightarrow\frac{1}{\alpha(x)}=\frac{2x+1}{-4}\right\}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{-4}{2x+1}\right)^{\frac{2x+1}{-4}}\right]^{\frac{-4}{2x+1}\cdot(4x+5)}=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-4}{2x+1}\right)^{\frac{2x+1}{-4}}\right]^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-4(4x+5)}{2x+1}}=e^{-8}.$$

**Пример**. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin 2x)^{\operatorname{ctg}\frac{x}{3}}=\left[1^{\infty}\right]=$

$$=\left\{\alpha(x)=\sin 2x\to 0 \text{ при } x\to 0;\ \frac{1}{\alpha(x)}=\frac{1}{\sin 2x}\right\}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[(1+\sin 2x)^{\frac{1}{\sin 2x}}\right]^{\sin 2x\cdot\operatorname{ctg}\frac{x}{3}}=\lim_{x\to 0}\left[(1+\sin 2x)^{\frac{1}{\sin 2x}}\right]^{\lim\limits_{x\to 0}\sin 2x\operatorname{ctg}\frac{x}{3}}=e^{6},$$

т.к. $\lim\limits_{x\to 0}\sin 2x\operatorname{ctg}\dfrac{x}{3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x\cdot\cos\frac{x}{3}}{\sin\frac{x}{3}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{\sin 2x}{x}\cdot\cos\frac{x}{3}}{\frac{\sin\frac{x}{3}}{x}}=\dfrac{2\cdot 1}{\frac{1}{3}}=6.$

## 5.4. Сравнение бесконечно малых. Использование эквивалентных бесконечно малых при вычислении пределов

**Определения.** Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – бесконечно малые функции при стремлении $x$ к $\omega$. Рассмотрим частное $\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$.

а) $\alpha(x)$ называется бесконечно малой более высокого порядка, чем $\beta(x)$, если существует предел их частного при $x\to\omega$, равный нулю:

$$\lim_{x\to\omega}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0.$$

Смысл этого определения состоит в том, что $\alpha(x)$ стремится к нулю быстрее, чем $\beta(x)$, при $x\to\omega$, в этом случае используется обозначение $\alpha(x)=o(\beta(x))$ ($\alpha(x)$ есть «*O* малое от $\beta(x)$»).

б) $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются бесконечно малыми одного порядка, если существует отличный от нуля конечный предел их частного

$$\lim_{x\to\omega}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=c\neq 0;$$

в) $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются эквивалентными бесконечно малыми, если существует предел их частного при $x\to\omega$, равный единице

$$\lim_{x\to\omega}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1.$$

Для эквивалентных бесконечно малых используют обозначение $\alpha(x)\sim\beta(x)$ при $x\to\omega$.

**Пример**. Сравним бесконечно малые при $x\to\omega$ функции $\alpha(x)=\dfrac{1}{x^2+3x-1}$ и $\beta(x)=\dfrac{1}{2x+1}$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2+3x-1}\cdot\frac{2x+1}{1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}}=0.$$

$\alpha(x)=\dfrac{1}{x^2+3x-1}$ является бесконечно малой более высокого порядка, чем $\beta(x)=\dfrac{1}{2x+1}$ при $x\to\infty$, т.е.

$$\alpha(x)=o(\beta(x)) \text{ при } x\to\infty.$$

**Пример**. Сравним бесконечно малые при $x\to 0$ функции $\alpha(x)=\sqrt[3]{1+x}-1$ и $\beta(x)=x$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt[3]{1+x}-1\right)\left(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1\right)}{x\left(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x-1}{x\left(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x\left(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1\right)}=\frac{1}{3}.$$

Бесконечно малые $\alpha(x)=\sqrt[3]{1+x}-1$ и $\beta(x)=x$ являются бесконечно малыми одного порядка при $x\to 0$.

А т.к. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-1}{\dfrac{x}{3}}=1$, то бесконечно малые $\alpha(x)=\sqrt[3]{1+x}-1$ и $\gamma(x)=\dfrac{x}{3}$ эквивалентны при $x\to 0$: $\sqrt[3]{1+x}-1\sim\dfrac{x}{3}$.

Можно доказать, что $\sqrt[n]{1+x}-1\sim\dfrac{x}{n}$ при $x\to 0$, в частности, $\sqrt{1+x}\sim\dfrac{x}{2}$.

***Основное свойство эквивалентных бесконечно малых***

Пусть при $x\to\omega$ бесконечно малая $\alpha(x)$ эквивалентна бесконечно малой $\alpha_1(x)$, бесконечно малая $\beta(x)$ эквивалентна бесконечно малой $\beta_1(x)$. Если существует $\lim\limits_{x\to\omega}\dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$, то существует и $\lim\limits_{x\to\omega}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$, равный тому же самому числу.

$$\alpha(x)\sim\alpha_1(x),\quad \beta(x)\sim\beta_1(x)\ \text{при}\ x\to\omega,\quad \exists\lim_{x\to\omega}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\exists\lim_{x\to\omega}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to\omega}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}.$$

**Доказательство.** По условию $\alpha(x)\sim\alpha_1(x)$, значит, существует $\lim\limits_{x\to\omega}\dfrac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)}=1$. И $\beta(x)\sim\beta_1(x)$, значит, существует $\lim\limits_{x\to\omega}\dfrac{\beta(x)}{\beta_1(x)}=1$.

Рассмотрим $\lim\limits_{x\to\omega}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$:

$$\lim_{x\to\omega}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to\omega}\frac{\alpha(x)\alpha_1(x)\beta_1(x)}{\beta(x)\alpha_1(x)\beta_1(x)}=\lim_{x\to\omega}\frac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)}\cdot\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}\cdot\frac{\beta_1(x)}{\beta(x)}=$$

$$=\lim_{x\to\omega}\frac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)}\cdot\lim_{x\to\omega}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}\cdot\lim_{x\to\omega}\frac{\beta_1(x)}{\beta(x)}=1\cdot\lim_{x\to\omega}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}\cdot 1=\lim_{x\to\omega}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}.$$

Получили $\lim\limits_{x\to\omega}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\limits_{x\to\omega}\dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$.

Это свойство позволяет при раскрытии неопределенности вида $\left[\frac{0}{0}\right]$ заменять бесконечно малые, стоящие в числителе и знаменателе дроби, более простыми эквивалентными им бесконечно малыми.

**Пример**. Используя известные эквивалентности $\sqrt[n]{1+x}-1\sim\frac{x}{n}$, находим предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{\sqrt[4]{1+x}-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{x}{3}}{\frac{x}{4}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cdot 4}{3\cdot x}=\frac{4}{3}$.

Составим таблицу важнейших эквивалентностей, которые используются при вычислении пределов.

***Таблица эквивалентных бесконечно малых***

$$\left(\alpha(x)\to 0 \textbf{ при } x\to\omega\right)$$

1) $\sqrt{1+\alpha(x)}-1\sim\frac{\alpha(x)}{2}$.

2) $\sqrt[3]{1+\alpha(x)}-1\sim\frac{\alpha(x)}{3}$.

3) $\sqrt[n]{1+\alpha(x)}-1\sim\frac{\alpha(x)}{n}$.

4) $\sin\alpha(x)\sim\alpha(x)$.

5) $\operatorname{tg}\alpha(x)\sim\alpha(x)$.

6) $\arcsin\alpha(x)\sim\alpha(x)$.

7) $\operatorname{arctg}\alpha(x)\sim\alpha(x)$.

8) $1-\cos\alpha(x)\sim\frac{1}{2}\left(\alpha(x)\right)^2$.

9) $\ln\left(1+\alpha(x)\right)\sim\alpha(x)$.

10) $\log_a\left(1+\alpha(x)\right)\sim\frac{\alpha(x)}{\ln a}$.

11) $e^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x)$.

12) $a^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x)\ln a$.

Эквивалентность этих бесконечно малых была доказана при рассмотрении первого и второго замечательных пределов, а также в примере выше. Рассмотрим примеры применения таблицы эквивалентных бесконечно малых к вычислению пределов.

**Пример**. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(1-4x^3\right)}{\left(3^{2x}-1\right)\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-4x^3}{\ln 3\cdot 2x\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\frac{-4}{2\ln 3\cdot\frac{1}{4}}=\frac{-8}{\ln 3}$, т.к.

$$\ln\left(1-4x^3\right)\sim -4x^3,\quad 3^{2x}-1\sim 2x\ln 3,\quad \operatorname{tg}\frac{x}{2}\sim\frac{x}{2}.$$

**Пример**. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{\sqrt{1-7x^2}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}(3x)^2}{-7x^2}=-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{9}{7}=-\dfrac{9}{14}$, т.к.

$$\sqrt{1-7x^2}-1\sim -7x^2,\quad 1-\cos 3x\sim\frac{1}{2}(3x)^2.$$

*Контрольные вопросы*

1. Перечислите основные виды неопределенностей, возникающих при вычислении пределов.
2. Приведите методы раскрытия неопределенностей.
3. Докажите первый замечательный предел и следствия из него.
4. Приведите различные формы записи второго замечательного предела.
5. Дайте определение эквивалентных бесконечно малых функций.
6. Приведите свойство эквивалентных бесконечно малых, которое можно использовать при вычислении пределов.
7. Приведите таблицу эквивалентных бесконечно малых функций.

# 6. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

## 6.1. Понятие непрерывности функции в точке

**Определение 1.** Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке $x_0$, если:

1) она определена в точке $x_0$ и некоторой окрестности $O(x_0)$ этой точки;

2) существует предел функции $f(x)$ при стремлении $x$ к $x_0$, равный значению $f(x)$ в точке $x_0$.

Коротко: $f(x)$ непрерывна в точке $x_0 \Leftrightarrow$ 1) $\exists O(x_0) \subset D(f)$; 2) $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Дадим другое определение непрерывности функции $f(x)$ в точке $x_0$. Введем обозначения:

$$x - x_0 = \Delta x, \quad x = x_0 + \Delta x \ \left(x \to x_0 \ \Leftrightarrow \ \Delta x \to 0\right), \quad \Delta y = f(x) - f(x_0).$$

Кроме того, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \left(f(x) - f(x_0)\right) = 0$, т.е. $\lim\limits_{x \to x_0} \Delta y = 0$.

**Определение 2.** Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке $x_0$, если:

1) она определена в точке $x_0$ и некоторой ее окрестности $O(x_0)$;

2) бесконечно малому приращению аргумента в этой точке соответствует бесконечно малое приращение функции.

Коротко:

$$f(x) \text{ непрерывна в точке } x_0 \Leftrightarrow 1)\ \exists O(x_0) \subset D(f);\ 2)\ \lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0.$$

**Определение.** Функция $f(x)$, непрерывная в каждой точке промежутка числовой оси, называется непрерывной в промежутке.

**Пример**. Докажем, что функция $f(x) = \sin x$ непрерывна.

Функция определена при любом $x \in \mathbb{R}$, докажем ее непрерывность в любой точке, используя второе определение непрерывности и известное неравенство $|\sin x| < |x|$ при $x \neq 0$.

Возьмем произвольное положительное значение $x_0$, дадим приращение $\Delta x$, получим $x = x_0 + \Delta x$, найдем $\Delta y$.

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0 =$$

$$= 2\sin\frac{x_0 + \Delta x - x_0}{2}\cos\frac{x_0 + \Delta x + x_0}{2} = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

$$|\Delta y| = 2\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right| \cdot \left|\cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)\right| < 2 \cdot \frac{|\Delta x|}{2} \cdot 1 = |\Delta x|,$$

$$\left(\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right| < \left|\frac{\Delta x}{2}\right|, \quad \left|\cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)\right| \le 1\right).$$

Получили $|\Delta y| < |\Delta x|$, значит, если $\Delta x \to 0$, то и $\Delta y \to 0$.

Согласно второму определению непрерывности это и означает, что функция $\sin x$ непрерывна в любой точке $x_0$.

### 6.2. Основные свойства непрерывных функций

1. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке $x_0$, то их сумма, разность, произведение и частное $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ (если $g(x_0) \ne 0$) непрерывны в точке $x_0$.

Докажем одно из утверждений, например, для частного $\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

$$f(x) \text{ непрерывна в точке } x_0 \Rightarrow \exists \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

$$g(x) \text{ непрерывна в точке } x_0 \Rightarrow \exists \lim_{x \to x_0} g(x) = g(x_0) \ne 0.$$

Рассмотрим функцию $\dfrac{f(x)}{g(x)}$:

1) она определена в точке $x_0$ (т.к. $g(x_0) \ne 0$) и в некоторой ее окрестности;

2) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x_0)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} = \dfrac{f(x_0)}{g(x_0)}$ по теореме о пределе частного двух функций, имеющих предел $\left(\lim\limits_{x \to x_0} g(x) \ne 0\right)$.

Таким образом, функция $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ удовлетворяет первому определению непрерывности, значит она непрерывна в точке $x_0$. Подобным образом доказываются остальные утверждения на основании свойств функций, имеющих предел.

2. Пусть функция $u = f(x)$ непрерывна в точке $x_0$ и принимает в этой точке значение $u_0 = f(x_0)$. Пусть функция $y = g(u)$ непрерывна в точке $u_0$. Тогда сложная функция $y = g(f(x))$ непрерывна в точке $x_0$.

**Доказательство.** Для доказательства используем второе определение непрерывности функции в точке.

Зададим приращение аргумента $\Delta x$, найдем значение функции $f(x)=f(x_0+\Delta x)$, получим приращение $\Delta u=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$. Тогда и функция $y=g(u)$ получит некоторое приращение $\Delta y$.

Устремим приращение $\Delta x$ к нулю. Т.к. функция $u=f(x)$ непрерывна в точке $x_0$, согласно второму определению непрерывности приращение $\Delta u$ есть бесконечно малая при $\Delta x\to 0$, т.е. $\Delta u\to 0$ при $\Delta x\to 0$. Т.к. функция $y=g(u)$ непрерывна в точке $u_0$, ее приращение $\Delta y$ есть бесконечно малая при $\Delta u\to 0$. Таким образом получим, что бесконечно малому приращению $\Delta x$ соответствует бесконечно малое приращение $\Delta y$ функции $y=f(g(x))$, значит сложная функция $y=f(g(x))$ непрерывна в точке $x_0$.

3. Пусть функция $y=f(x)$ определена, возрастает (убывает) и непрерывна в некотором промежутке числовой оси. Тогда в ее области изменения, отвечающей этому промежутку, определена функция, обратная данной, непрерывная в каждой точке этой области и возрастающая (убывающая).

Например, функция $y=\sin x$ непрерывна в каждой точке промежутка $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, областью изменения этой функции является отрезок $[-1;1]$.

Обратная ей функция $y=\arcsin x$ непрерывна в каждой точке промежутка $(-1;1)$.

4. Если элементарная функция определена в точке $x_0$ и некоторой ее окрестности, то она непрерывна в точке $x_0$.

**Доказательство.**

1) $f(x)=e^x$. Эта функция определена при любом действительном значении $x$. Возьмем некоторое $x_0\in(-\infty;\infty)$, дадим приращение $\Delta x$, найдем $\Delta y=e^{x_0+\Delta x}-e^{x_0}= =e^{x_0}\left(e^{\Delta x}-1\right)$, вычислим предел $\Delta y$ при $\Delta x\to 0$:

$$\lim_{x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}e^{x_0}\left(e^{\Delta x}-1\right)=e^{x_0}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(e^{\Delta x}-1\right)}{\Delta x}\Delta x=$$

$$=e^{x_0}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x=e^{x_0}\cdot 1\cdot 0=0.$$

Бесконечно малому приращению аргумента $\Delta x$ соответствует бесконечно малое приращение функции $\Delta y$, согласно второму определению непрерывности функция $e^x$ непрерывна в любой точке $x_0$.

2) Функция $y=\ln x$ является обратной к функции $y=e^x$, поэтому по свойству о непрерывности обратной функции она непрерывна при любом положительном значении $x$.

3) $f(x)=a^x$. Используем тождество $a^x=e^{\ln a}=e^{x\cdot\ln a}$.

Функцию $a^x$ представили в виде сложной функции $y=e^u$, $u=x\cdot\ln a$.

Обе функции $e^u$ и $x\cdot\ln a$ являются непрерывными, по свойству о непрерывности сложной функции будет непрерывной и сложная функций $a^x$ при любом действительном значении $x$.

4) $f(x)=\log_a x$.

Эта функция является обратной к функции $a^x$, поэтому по свойству о непрерывности обратной функции она непрерывна при любом положительном значении $x$.

5) $f(x)=x^\alpha$. Представим функцию в виде сложной функции

$$y=x^\alpha=e^{\ln x^\alpha}=e^{\alpha\cdot\ln x},\ y=e^u,\ \ u=\alpha\ln x.$$

Обе функции $e^u$ и $\alpha\cdot\ln x$ непрерывны при любом положительном значении $x$, значит непрерывна и сложная функция $x^\alpha$ при любом положительном значении аргумента $x$.

6) $f(x)=\sin x$.

Непрерывность доказана выше.

7) $f(x)=\cos x$.

Представим функцию в виде сложной функции $y=\cos x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$.

$$y=\sin u,\ \ u=\frac{\pi}{2}-x.$$

Обе эти функции непрерывны при любом значении $x$, значит непрерывна и сложная функция.

8) $f(x)=\operatorname{tg}x,\ \ f(x)=\operatorname{ctg}x$.

Представим: $\operatorname{tg}x=\frac{\sin x}{\cos x}$, $\operatorname{ctg}x=\frac{\cos x}{\sin x}$. Значит, эти функции непрерывны в любой точке своей области определения ($\operatorname{tg}x$ при всех $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n$, $\operatorname{ctg}x$ при всех $x\neq\pi n$) как частное двух непрерывных функций.

9) Обратные тригонометрические функции $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg}x$, $\operatorname{arcctg}x$ непрерывны в любой точке своей области определения по свойству о непрерывности обратной функции.

Мы доказали непрерывность основных элементарных функций в любой точке области определения. Согласно свойствам непрерывных функций,

непрерывной в каждой точке своей области определения является любая элементарная функция, т.к. она, по определению, задается одной формулой и выражается через основные элементарные функции с помощью конечного числа арифметических действий или суперпозиций.

## 6.3. Исследование непрерывности функции. Классификация точек разрыва

Дадим определение пределов функции в точке $x_0$ справа $(x > x_0)$ и слева $(x < x_0)$, которые называются односторонними пределами функции в точке $x$.

**Определение.** Число $a$ называется пределом функции $f(x)$ в точке $x_0$ справа, если для любого положительного числа $\varepsilon$ найдется такое положительное число $\delta$, что для всех значений $x$ из полуокрестности $(x_0; x_0 + \delta)$ выполняется неравенство $|f(x) - a| < \varepsilon$.

Число $b$ называется пределом функции $f(x)$ в точке $x_0$ слева, если для любого положительного числа $\varepsilon$ найдется такое положительное число $\delta$, что для всех значений $x$ из полуокрестности $(x_0 - \delta; x_0)$ выполняется неравенство

$$|f(x) - b| < \varepsilon.$$

Будем обозначать односторонние пределы функции $f(x)$ в точке $x_0$:

$$f(x_0+) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) \text{ – предел в точке } x_0 \text{ справа,}$$

$$f(x_0-) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) \text{ – предел в точке } x_0 \text{ слева.}$$

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ существует тогда и только тогда, когда существует предел в точке $x_0$ справа $f(x_0+)$, предел в точке $x_0$ слева $f(x_0-)$ и эти пределы совпадают:

$$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) \Leftrightarrow \exists f(x_0+),\ \ \exists f(x_0-),\ \ f(x_0+) = f(x_0-).$$

С учетом этого преобразуем первое определение непрерывности.

**Определение 3.** Функция $f(x)$ непрерывна в точке $x_0$, если:

1) функция определена в точке $x_0$ и некоторой ее окрестности;

2а) в точке $x_0$ существуют левосторонний и правосторонний пределы;

2б) односторонние пределы равны между собой;

3) значение этих пределов совпадает со значением функции в точке $x_0$.

**Определение.** Если в точке $x_0$ нарушено хотя бы одно из этих условий, точка $x_0$ называется точкой разрыва функции.

### *Классификация разрывов*

**Определение.** Если точка $x_0$ является точкой разрыва, но в ней существуют односторонние пределы, т.е. условие 2 выполняется, то $x_0$ называется точкой разрыва 1-го рода.

**Определение.** Если точка $x_0$ является точкой разрыва, и не существует хотя бы один из пределов $f(x_0-)$ или $f(x_0+)$, т.е. условие 2 нарушено, то $x_0$ называется точкой разрыва 2-го рода.

**Определение.** Точка разрыва 1-го рода называется точкой устранимого разрыва, если выполняется равенство $f(x_0-)=f(x_0+)$, т.е. выполняются условия 2а и 2б.

**Пример**. Исследовать функцию $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-3}, & x\neq 3,\\ 0, & x=3\end{cases}$ на непрерывность.

**Решение.** Функция определена при всех значениях $x$. Во всех точках $x\neq 3$ она непрерывна.

Найдем односторонние пределы функции в точке $x=3$:

$$f(3-)=\lim_{x\to 3-0}\frac{1}{x-3}=-\infty$$

(при $x<3$ значения $\dfrac{1}{x-3}$ отрицательны, знаменатель дроби при $x\to 3$ является бесконечно малой, значит дробь $\dfrac{1}{x-3}$ является отрицательной бесконечно большой).

$$f(3+)=\lim_{x\to 3+0}\frac{1}{x-3}=+\infty$$

(при $x>3$ значения дроби $\dfrac{1}{x-3}$ положительны, $x-3\to 0$, значит дробь $\dfrac{1}{x-3}$ является положительной бесконечно большой).

Т.е. пределы в точке $x=3$ не существуют, и эта точка является точкой разрыва функции. Причем разрыв 2-го рода. График на рис. 53.

**Пример**. Исследовать функцию $y=\begin{cases}3^{\frac{1}{x+1}}, & x\neq -1,\\ 1, & x=-1\end{cases}$ на непрерывность.

**Решение.** Функция определена при всех значениях $x$. Во всех точках своей области определения, кроме $x=-1$, она непрерывна.

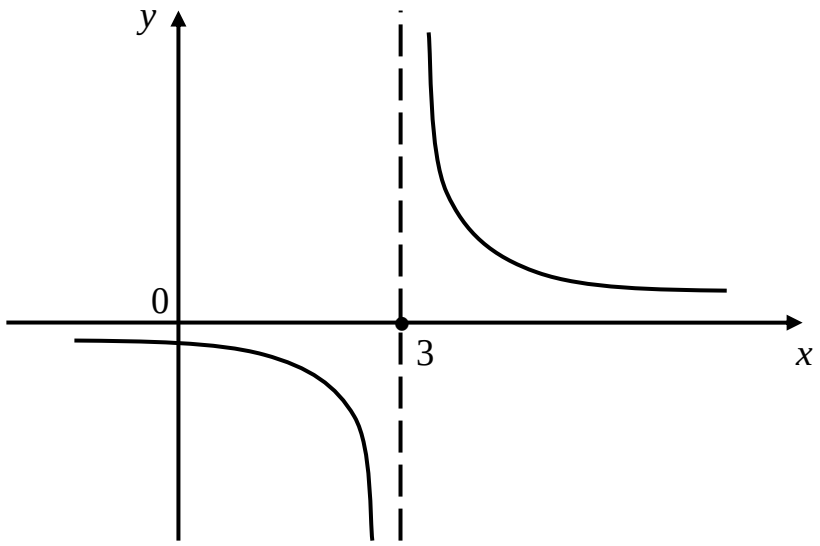



Рис. 53

Найдем односторонние пределы функции в точке $x=-1$:

$$\lim_{x\to -1-0} 3^{\frac{1}{x+1}} = 0 \left( x+1<0,\ x+1\to 0,\ \frac{1}{x+1}\to -\infty,\ 3^{\frac{1}{x+1}}\to 0 \right);$$

$$\lim_{x\to -1+0} 3^{\frac{1}{x+1}} = +\infty \left( x+1>0,\ x+1\to 0,\ \frac{1}{x+1}\to +\infty,\ 3^{\frac{1}{x+1}}\to +\infty \right).$$

Правосторонний предел не существует, значит, точка $x=-1$ является точкой разрыва второго рода. График на рис. 54.

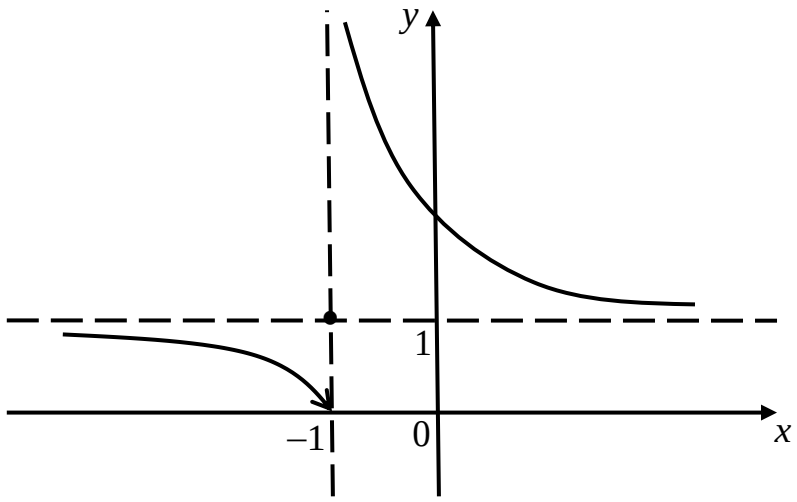



Рис. 54

Заметим $\lim\limits_{x\to\infty} 3^{\frac{1}{x+1}} = 1$ $\left( \frac{1}{x+1}\to 0 \text{ при } x\to\infty,\ \lim\limits_{x\to\infty} 3^{\frac{1}{x+1}} = 3^0 = 1 \right)$. Это означает, что график функции имеет асимптоту $y=1$.

**Пример**. Исследовать функцию $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$ на непрерывность.

**Решение.** Функция определена при всех значениях $x$. Во всех точках своей области определения, кроме $x=0$, она непрерывна.

Предел функции при стремлении $x$ к нулю существует и равен 1 (это первый замечательный предел), значит $f(0-)=f(0+)=1$. Нарушено в точке $x=0$ только условие 1, значит точка $x=0$ является точкой устранимого разрыва функции $\dfrac{\sin x}{x}$ (рис. 55).

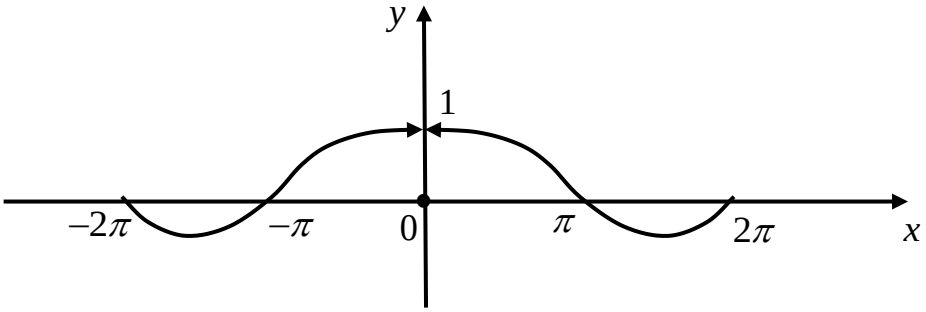



Рис. 55

**Замечание.** Можно сделать точку $x=0$ точкой непрерывности функции, определив функцию в точке $x=0$ значением ее пределов слева и справа

$$f_1(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0.\end{cases}$$

Функция $f_1(x)$ непрерывна при всех $x\in\mathbb{R}$, ее значения совпадают со значениями «старой» функции при всех $x\neq 0$.

**Пример**. Исследовать функцию на непрерывность:

$$f(x)=\begin{cases}2x+6, & x>-1,\\ x^2-2x, & -1\le x<2,\\ \sin\dfrac{\pi x}{2}, & x\ge 2.\end{cases}$$

**Решение.** Функция определена при всех $x$, но на различных промежутках числовой оси задана разными элементарными функциями. Она непрерывна при всех $x\in(-\infty;-1)\cup(-1;2)\cup(2;+\infty)$.

Осталось установить, непрерывна ли функция в точках $x=-1$ и $x=2$, т.е. в точках, где меняется выражение функции. Найдем в каждой из этих точек односторонние пределы, сравним их со значением функции в точке.

$$\lim_{x\to -1-0} f(x) = \lim_{x\to -1-0} (2x+6) = 4.$$

$$\lim_{x\to -1+0} f(x) = \lim_{x\to -1+0} \left(x^2-2x\right) = 3.$$

$$f(-1) = \left(x^2-2x\right)\Big|_{x=-1} = 3.$$

Односторонние пределы существуют, но различны, значит, в точке $x=-1$ функция имеет разрыв 1-го рода, неустранимый.

$$\lim_{x\to 2-0} f(x) = \lim_{x\to 2-0} \left(x^2-2x\right) = 0.$$

$$\lim_{x\to 2+0} f(x) = \lim_{x\to 2+0} \sin\frac{\pi x}{2} = 0.$$

$$f(2) = \sin\frac{\pi x}{2}\Big|_{x=2} = \sin\pi = 0.$$

Односторонние пределы существуют и равны между собой, а также равны значению функции в точке, значит, в точке $x=2$ функция непрерывна. График на рис. 56.

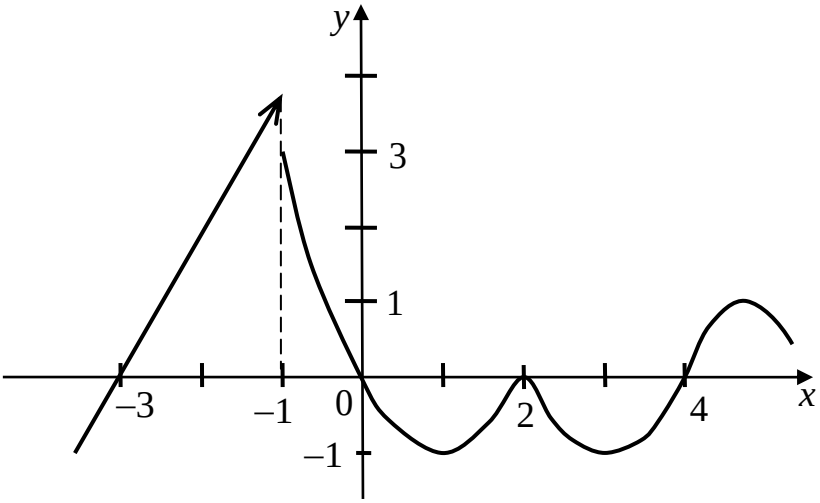



Рис. 56

### 6.4. Свойства функции, непрерывной на отрезке

**Определение.** Функция $f(x)$ называется непрерывной на некотором множестве, если она непрерывна в каждой точке этого множества.

Непрерывные на отрезке функции обладают важными свойствами, которые мы сформулируем (доказательства этих свойств выходят за рамки нашего курса).

Сначала уточним понятие «непрерывность на отрезке».

**Определение.** Функция $f(x)$ называется непрерывной на отрезке $[a;b]$, если она непрерывна в каждой точке интервала $(a;b)$, $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=f(a)$ и $\lim\limits_{x\to b-0} f(x)=f(b)$.

**Теорема.** *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то:*

*1) функция ограничена на этом отрезке;*

*2) достигает на этом отрезке наибольшего и наименьшего значений;*

*3) функция принимает на данном отрезке все промежуточные по величине значения между наибольшим и наименьшим.*

На рис. 57 изображен график непрерывной на отрезке $[a;b]$ функции. Она ограничена на этом отрезке: $m\le f(x)\le M$ для всех $x\in[a;b]$. Наибольшее значение $M$ достигается в точке внутри отрезка, наименьшее $m$ достигается в точке $b$. все промежуточные значения достигаются. Например, значение $l$ достигается в точках $x_1$ и $x_2$.

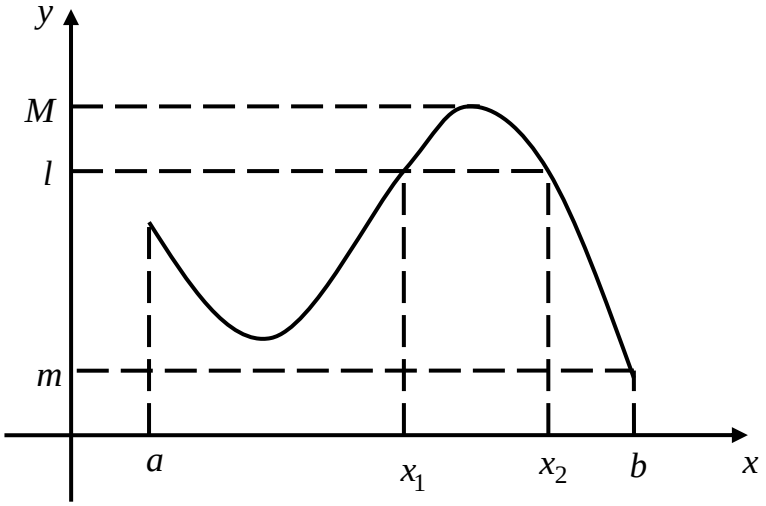



Рис. 57

Свойство 3 чаще всего используется в следующем виде: если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и на его концах принимает значения разных знаков, то внутри отрезка найдется точка, в которой значение функции равно 0 (рис. 58).

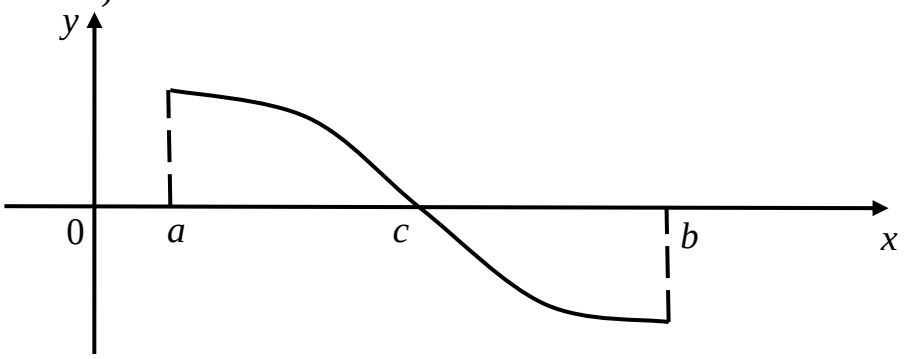



Рис. 58

Например, функция $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & 0<x\le 1,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ (рис. 59) заданная на отрезке $[0;1]$, не является ограниченной сверху на этом отрезке, не достигает на нем наибольшего значения. Причина невыполнения утверждения теоремы в нарушение условия теоремы: $\lim\limits_{x\to 0+0} f(x)=\infty$ и не равен значению функции в нуле $f(0)=0$.

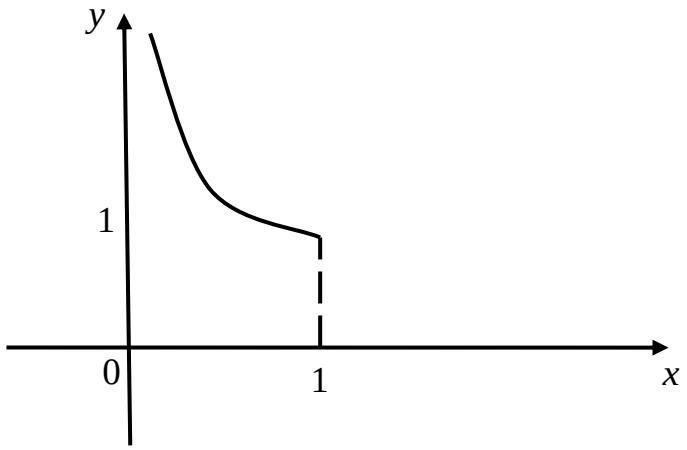



Рис. 59

Например, функция $f(x)=\begin{cases} x & \text{при } 0\le x\le 1,\\ x+1 & \text{при } 1<x\le 3\end{cases}$ (рис. 60) определена на отрезке $[0;3]$, ограничена на отрезке $\left(\left|f(x)\right|\le 4 \text{ при } x\in[0;3]\right)$, достигает на отрезке наибольшего и наименьшего значений $m=f(0)=0$, $M=f(3)=4$, но не принимает ни в одной точке отрезка значение 2,5, т.е. не выполняется третье утверждение теоремы. Причина в том, что функция имеет разрыв внутри отрезка в точке $x=1$.

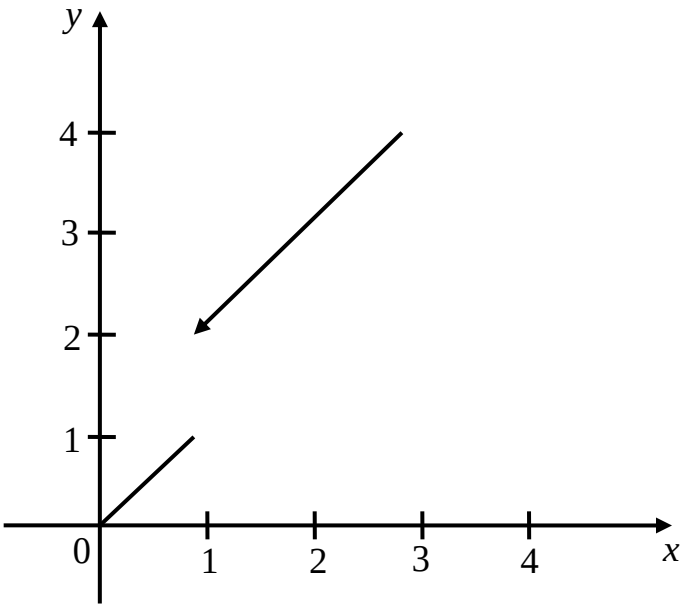



Рис. 60

*Контрольные вопросы*

1. Дайте три определения непрерывности функции в точке.
2. Дайте определение точки разрыва.
3. Приведите классификацию точек разрыва.
4. Приведите свойства функций, непрерывных на отрезке.

# 7. ПРОИЗВОДНАЯ

## 7.1. Определение производной

Пусть дана функция $y = f(x)$. Зафиксируем значение аргумента $x_0$. Рассмотрим новое значение аргумента $x$. При этом $x$ может быть как больше $x_0$, так и меньше $x_0$. Вычислим $y_0 = f(x_0)$ и $y = f(x)$.

Разность $x - x_0$ называется приращением аргумента $x$ в точке $x_0$ и обозначается $\Delta x$:

$$\Delta x = x - x_0 .$$

Разность $y - y_0$ называется приращением функции в точке $x_0$ и обозначается $\Delta y$:

$$\Delta y = y - y_0 = f(x) - f(x_0).$$

Т.к. $x = x_0 + \Delta x$, то

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0). \qquad (8.1.1)$$

Отметим, что приращение $\Delta x$ может быть как положительным, так и отрицательным.

Из (8.1.1) следует, что переменная $\Delta y$ является функцией переменной $\Delta x$.

Составим отношение приращения функции к приращению аргумента:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

**Определение.** Производной функции $y = f(x)$ в точке $x_0$ называется предел (если он существует) отношения приращения функции к приращению аргумента при стремлении $\Delta x$ к нулю:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Пусть $M$ – множество значений $x$, в которых существует производная. Правило, по которому каждому $x \in M$ соответствует производная в этой точке $f'(x)$, представляет собой новую функцию, определенную на множестве $M$. При этом множество $M$, вообще говоря, ỳже, чем область определения функции. Эта функция называется *производной от функции* $f(x)$ и обозначается $f'(x)$, $y'$, $y'_x$.

Конкретное значение производной при $x = x_0$ обозначается $f'(x_0)$ или $y'\big|_{x=x_0}$.

Операция нахождения производной функции называется *дифференцированием* этой функции.

**Пример.** Найти производную функции $y = 3x^2 + 5$.

**Решение.** 1. Дадим аргументу $x$ приращение $\Delta x$ и найдем новое значение функции

$$y(x+\Delta x) = 3(x+\Delta x)^2 + 5.$$

2. Найдем приращение функции

$$\Delta y = y(x+\Delta x) - y(x) = 3(x+\Delta x)^2 + 5 - 3x^2 - 5 = 6x\Delta x + 3(\Delta x)^2.$$

3. Найдем отношение приращения функции к приращению аргумента:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6x\Delta x + 3(\Delta x)^2}{\Delta x} = 6x + 3\Delta x.$$

4. Вычислим предел этого отношения при $\Delta x \to 0$:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0}(6x + 3\Delta x) = 6x.$$

Эта производная определена на всей числовой оси, т.к. при ее нахождении значение $x$ было выбрано произвольно.

Найдем значение производной в точке $x_0 = 3$: $f'(3) = 6 \cdot 3 = 18$.

**Замечание.** Значение производной $f'(x_0)$ находится так: сначала ищем производную $f'(x)$, а потом в выражение производной подставляем данное значение $x_0$.

**Пример.** Найти производную функции $y = x^3$.

**Решение.** 1. $y(x+\Delta x) = (x+\Delta x)^3 = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$.

2. $\Delta y = 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$.

3. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{3x^2\Delta x}{\Delta x} + \dfrac{3x(\Delta x)^2}{\Delta x} + \dfrac{(\Delta x)^3}{\Delta x} = 3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2$.

4. $\left(x^3\right)' = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\left(3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2\right) = 3x^2$.

**Пример.** Найти производную функции $y = e^x$.

**Решение.** 1. $y(x+\Delta x) = e^{x+\Delta x} = e^x e^{\Delta x}$.

2. $\Delta y = e^x e^{\Delta x} - e^x = e^x\left(e^{\Delta x} - 1\right)$.

3. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{e^x\left(e^{\Delta x} - 1\right)}{\Delta x} = e^x\left(\dfrac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}\right)$.

4. $\left(e^x\right)' = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} e^x\left(\dfrac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}\right)$.

Используя эквивалентность бесконечно малых $e^{\Delta x}-1$ и $\Delta x$ при $\Delta x \to 0$, т.е. то, что $\lim\limits_{\Delta x \to 0}\left(\dfrac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}\right)=1$, получаем $\left(e^x\right)'=e^x$.

**Пример.** Найдем производную функции $y=\sin x$.

**Решение.** 1. $y(x+\Delta x)=\sin(x+\Delta x)$.

2. $\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\sin\dfrac{x+\Delta x-x}{2}\cos\dfrac{x+\Delta x+x}{2}=$

$$=2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right).$$

3. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{2\sin\dfrac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\dfrac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}=\dfrac{\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}}\cos\left(x+\dfrac{\Delta x}{2}\right)$.

4. $(\sin x)'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}}\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\dfrac{\Delta x}{2}\right)$. Т.к. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}}=1$ (первый замечательный предел), то, учитывая непрерывность функции $\cos x$, имеем $(\sin x)'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\dfrac{\Delta x}{2}\right)=\cos x$.

### 7.2. Механический и экономический смысл производной

Будем рассматривать прямолинейное движение некоторой материальной точки.

Для удобства восприятия параллельно будем приводить в квадратных скобках аналогичные построения из п. 8.1.

Путь $S$, проходимый точкой за время $t$, является функцией времени, т.е. $S=S(t)$ $\left[y=f(x)\right]$. Зафиксируем некоторый момент времени $t_0$ $\left[x_0\right]$. К этому моменту точка прошла путь $S_0=S(t_0)$ $\left[y_0=f(x_0)\right]$. Поставим задачу определить скорость $\upsilon_0$ материальной точки в момент $t_0$.

Рассмотрим для этого какой-нибудь другой момент времени $t_0+\Delta t$ $\left[x_0+\Delta x\right]$. Ему соответствует пройденный путь $S=S(t_0+\Delta t)$ $\left[y=f(x_0+\Delta x)\right]$. Тогда за промежуток времени $\Delta t=t-t_0$ $\left[\Delta x=x-x_0\right]$ точка прошла путь $\Delta S=S-S_0=S(t_0+\Delta t)-S(t_0)$ $\left[\Delta y=y(x_0+\Delta x)-y(x_0)\right]$.

Средняя скорость за промежуток времени $\Delta t$ определяется отношением пройденного пути ко времени $\upsilon_{cp} = \frac{\Delta S}{\Delta t}$ $\left[\frac{\Delta y}{\Delta x}\right]$. Т.к. начальный момент времени $t_0$ зафиксирован, а промежуток времени $\Delta t$ является переменной величиной, то средняя скорость $\upsilon_{cp}$ является переменной величиной, зависящей от $\Delta t$

**Определение.** Скоростью $\upsilon_0$ в данный момент $t_0$ называется предел средней скорости $\upsilon_{cp}$ при $\Delta t \to 0$, т.е. $\upsilon_0 = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{S(t_0 + \Delta t) - S(t_0)}{\Delta t}$ при условии, что этот предел существует и конечен.

Этот предел и есть производная $S'(t_0)$. Заметим, что мгновенная скорость зависит от выбранного значения $t_0$, т.е. является функцией аргумента $t$: $\upsilon = \upsilon(t)$.

Таким образом, скорость $\upsilon$ прямолинейного движения материальной точки в момент времени $t$ есть производная от пути $S$ по времени $t$. В этом заключается механический смысл производной.

Рассмотрим задачу об определении производительности труда. Объем произведенной к моменту времени $t$ продукции, является функцией времени, т.е. $u = u(t)$. Зафиксируем некоторый момент времени $t_0$. К этому моменту была произведена продукция в объеме $u_0 = u(t_0)$. Поставим задачу определить производительность труда $z_0$ в момент времени $t_0$.

Рассмотрим для этого какой-нибудь другой момент времени $t_0 + \Delta t$. К этому моменту была произведена продукция в объеме $u = u(t_0 + \Delta t)$. Тогда за промежуток времени $\Delta t = t - t_0$ было произведено $\Delta u = u - u_0 = u(t_0 + \Delta t) - u(t_0)$.

Средняя производительность труда за промежуток времени $\Delta t$ определяется отношением произведенной за этот промежуток продукции ко времени $z_{cp} = \frac{\Delta u}{\Delta t}$. Средняя производительность труда $z_{cp}$ является переменной величиной, зависящей от $\Delta t$.

За производительность труда в момент времени $t_0$ примем предел средней производительности при неограниченном уменьшении промежутка времени, т.е.

$$z_0 = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{u(t_0 + \Delta t) - u(t_0)}{\Delta t}.$$

Этот предел и есть производная $u'(t_0)$.

Значит, производительность труда $z$ в момент времени $t$ есть производная от объема производства $u = u(t)$ по времени $t$. Ниже будут приведены некоторые другие применения производной в экономике.

### 7.3. Геометрический смысл производной

Рассмотрим график непрерывной функции $y = f(x)$, у которой на промежутке $(a; b)$ существует производная (рис. 61). Зафиксируем на нем точку $M_0$ с координатами $(x_0, f(x_0))$. Возьмем на графике точку $M(x, f(x))$ и проведем секущую $M_0M$.

**Определение.** Касательной к кривой в точке $M_0(x_0, f(x_0))$ называется прямая, являющаяся предельным положением секущей $M_0M$, когда точка $M$, перемещаясь по кривой, стремится к точке $M_0$.

Если точка $M$ неограниченно приближается к точке $M_0$ с любой стороны, то секущая, поворачиваясь вокруг точки $M_0$, в пределе переходит в касательную, имеющую с графиком функции $y = f(x)$ одну общую точку $M_0$.

Геометрический смысл производной вытекает из следующего утверждения.

**Теорема.** *Если существует производная от функции* $y = f(x)$ *при* $x = x_0$, *равная* $f'(x_0)$, *то прямая, проведенная через точку* $M_0(x_0, y_0)$ *с угловым коэффициентом* $k = f'(x_0)$, *является касательной к графику функции в точке* $M_0$.

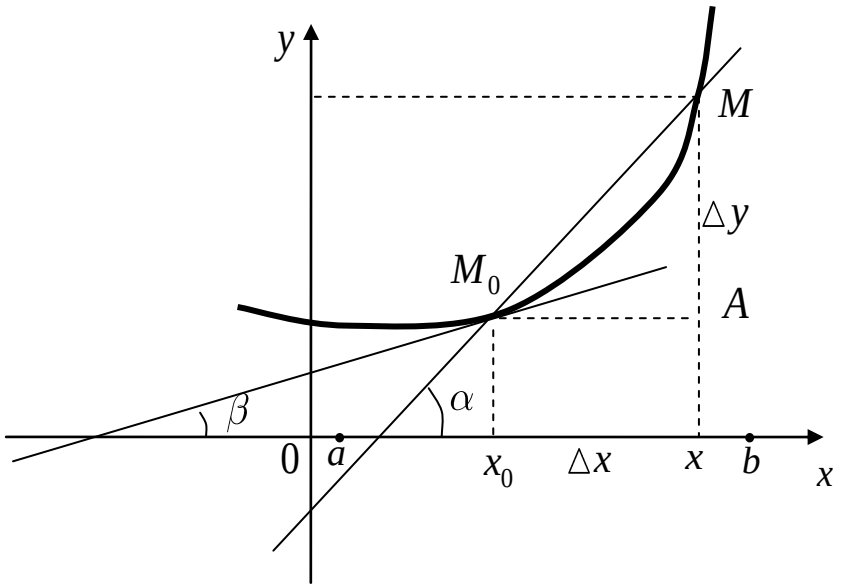



Рис. 61

**Доказательство.** Обозначим $\Delta x = x - x_0$ (рис. 61). Тогда $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Рассмотрим угол $\alpha$, образованный секущей $M_0M$ с положительным направлением оси $Ox$: $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Пусть теперь $\Delta x \to 0$, тогда точка $M$ будет перемещаться по графику функции $y = f(x)$ к точке $M_0$. Секущая $M_0M$ при этом поворачивается вокруг точки $M_0$.

Используя факт существования производной $f'(x_0)$, имеем

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta,$$

где $\beta$ – угол между касательной, проведенной к графику функции в точке $M_0$, и положительным направлением оси $Ox$.

Таким образом, $k = \operatorname{tg}\beta = f'(x_0)$ – угловой коэффициент касательной.

**Замечание.** Мы показали, что если в точке $x_0$ функция имеет производную, то ее график в точке с абсциссой $x_0$ имеет невертикальную касательную. Можно показать, что верно и обратное утверждение: если график непрерывной функции $y = f(x)$ имеет невертикальную касательную в точке с абсциссой $x_0$, то в этой точке существует производная $f'(x_0)$, равная угловому коэффициенту касательной.

### 7.4. Уравнение касательной и нормали к кривой

Т.к. касательная проходит через точку $(x_0, f(x_0))$ и ее угловой коэффициент равен $k = f'(x_0)$, то ее уравнение имеет вид

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

**Определение.** Нормалью к кривой в данной точке называется прямая, проходящая через эту точку перпендикулярно к касательной, проведенной в этой же точке.

Следовательно, если угловой коэффициент касательной равен $f'(x_0)$, то угловой коэффициент нормали равен $-\dfrac{1}{f'(x_0)}$, а потому уравнение нормали имеет вид

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

**Пример.** Составить уравнение касательной и нормали к кривой $y = 3x^2 + 5$ в точке $x_0 = 3$.

**Решение.** Находим ординату точки касания $f(x_0)=f(3)=3\cdot 9+5=32$. Т.к. $y'=6x$ (пример 1 из п. 1.1), имеем $f'(x_0)=f'(3)=18$. Следовательно, уравнение касательной имеет вид $y-32=18(x-3)$ или $y=18x-22$. Уравнение нормали $y-32=-\frac{1}{18}(x-3)$ или $y=-\frac{1}{18}x+\frac{193}{6}$.

## 7.5. Дифференцируемость функций

Пусть функция $y=f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x$.

**Определение.** Говорят, что функция $y=f(x)$ дифференцируема в точке $x$, если ее приращение $\Delta y$ в этой точке можно записать в виде

$$\Delta y=A\cdot\Delta x+\alpha(\Delta x)\cdot\Delta x, \qquad (8.5.1)$$

где $A$ – некоторая константа, не зависящая от $\Delta x$, но, вообще говоря, зависящая от $x$, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta x)=0$.

**Пример.** Рассмотрим функцию $y=x^3$.

Найдем приращение функции в произвольной точке

$$\Delta y=(x+\Delta x)^3-x^3=3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3=3x^2\Delta x+\left(3x\Delta x+(\Delta x)^2\right)\Delta x.$$

Положим $A=3x^2$, $\alpha(\Delta x)=3x(\Delta x)+(\Delta x)^2$, получим представление (8.5.1).

**Теорема (необходимое и достаточное условие дифференцируемости).** *Для того чтобы функция $y=f(x)$ была дифференцируема в точке $x$, необходимо и достаточно, чтобы она имела в этой точке производную $f'(x)$.*

**Доказательство.**

1. Необходимость. Пусть функция $y=f(x)$ дифференцируема в точке $x$. Тогда ее приращение в этой точке можно представить в виде (8.5.1).

Разделим обе части (8.5.1) на $\Delta x$ и перейдем к пределу при $\Delta x\to 0$. Тогда

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=A+\lim_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta x)=A.$$

2. Достаточность. Если функция $y=f(x)$ имеет в точке $x$ производную, то существует предел

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x).$$

Отсюда следует, что $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(\Delta x)$, где $\alpha(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Или $\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$. Если ввести обозначение $A = f'(x)$, то получим требуемое утверждение.

**Теорема (о связи непрерывности и дифференцируемости).** *Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке $x_0$, то она в этой точке непрерывна.*

**Доказательство.** Пусть аргумент $x$ получает в точке $x_0$ приращение $\Delta x$. Ему соответствует некоторое приращение функции $\Delta y$.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} \left( A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x \right) = A \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x + \lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x = 0.$$

Следовательно, если $\Delta x \to 0$, то и $\Delta y \to 0$, а это и означает, что функция $y = f(x)$ непрерывна в точке $x_0$.

**Замечание.** Обратное утверждение неверно, т.е. из того факта, что в какой-нибудь точке $x_0$ функция $y = f(x)$ является непрерывной, еще не следует, что в этой точке она дифференцируема.

Чтобы убедиться в этом, рассмотрим два примера.

**Пример.** Дана функция (рис. 62) $f(x) = \begin{cases} x, & x \le 1, \\ 3x - 2, & x > 1. \end{cases}$

Эта функция при $x = 1$ непрерывна, т.к. $\lim\limits_{x \to 1+0} f(x) = \lim\limits_{x \to 1-0} f(x) = f(1)$. Покажем, что эта функция не имеет производной при $x = 1$. Действительно:

1) пусть $\Delta x > 0$. Тогда

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3(1 + \Delta x) - 2 - 1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3\Delta x}{\Delta x} = 3.$$

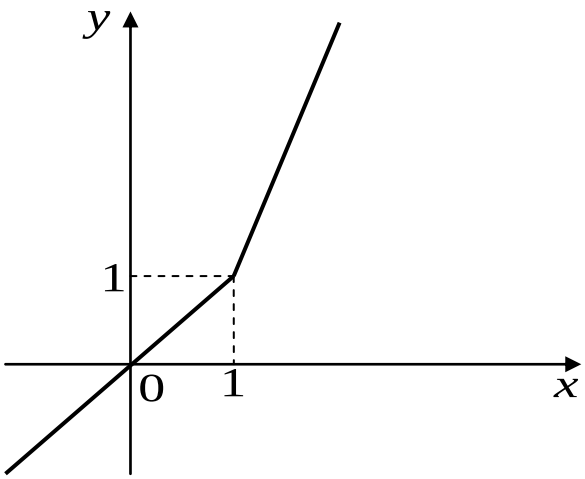



Рис. 62

2) пусть $\Delta x < 0$. Имеем

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1+\Delta x - 1}{\Delta x} = 1.$$

Таким образом, рассматриваемый предел зависит от того, каков знак $\Delta x$, а значит зависит от способа стремления $\Delta x$ к нулю.

**Пример.** Функция $y = \sqrt[5]{x}$ непрерывна на всей числовой оси и, в частности, при $x = 0$. Докажем, что в точке $x = 0$ эта функция не имеет производной.

Действительно, попытаемся вычислить производную в точке $x_0 = 0$.

1) $\Delta x = x - 0$.

2) $\Delta y = \sqrt[5]{0 + \Delta x} - \sqrt[5]{0} = \sqrt[5]{\Delta x}$.

3) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\sqrt[5]{\Delta x}}{\Delta x} = \dfrac{1}{\sqrt[5]{(\Delta x)^4}}$.

4) Перейдем к пределу: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{1}{\sqrt[5]{(\Delta x)^4}} = \infty$.

А это и означает, что функция $y = \sqrt[5]{x}$ в точке $x = 0$ не имеет производной.

## 7.6. Основные правила дифференцирования

Установим правила, по которым можно было бы находить производные алгебраической суммы, произведения и частного функций, зная производные слагаемых, сомножителей, делимого и делителей.

При выводе формул будем пользоваться следующей схемой:

1. Дать аргументу $x$ приращение $\Delta x$, вычислить значение функции в новой точке:

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x).$$

2. Найти приращение функции, соответствующее приращению аргумента $\Delta x$:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

3. Составить отношение приращения функции к приращению аргумента:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

4. Отыскать предел этого отношения при $\Delta x \to 0$:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Предполагается, что все встречающиеся функции определены и дифференцируемы на некотором общем интервале, содержащем рассматриваемые значения $x$ и $x+\Delta x$.

**Теорема.** *Производная от алгебраической суммы конечного числа дифференцируемых функций равна алгебраической сумме производных от этих функций. В частности, если* $u=u(x)$, $v=v(x)$, то

$$(u+v)'=u'+v'.$$

**Доказательство.** Пусть $y(x)=u(x)+v(x)$.

1. Для значения аргумента $x+\Delta x$ имеем: $y+\Delta y=(u+\Delta u)+(v+\Delta v)$, где $\Delta y$, $\Delta u$, $\Delta v$ – приращения функций $y$, $u$, $v$, соответствующие приращению $\Delta x$ аргумента $x$.

2. $\Delta y=(u+\Delta u)+(v+\Delta v)-(u+v)=\Delta u+\Delta v$.

3. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{\Delta u}{\Delta x}+\dfrac{\Delta v}{\Delta x}$.

4. $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\dfrac{\Delta u}{\Delta x}+\dfrac{\Delta v}{\Delta x}\right)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta u}{\Delta x}+\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta v}{\Delta x}=u'+v'$, т.к. по предположению все слагаемые являются дифференцируемыми функциями.

**Пример.** $y=\sin x+e^x$, $y'=(\sin x)'+\left(e^x\right)'=\cos x+e^x$.

**Теорема.** Производная произведения двух дифференцируемых функций находится по формуле $(u\cdot v)'=u'\cdot v+v'\cdot u$.

**Доказательство.** Пусть $y=u\cdot v$.

1. Если $x$ получит приращение $\Delta x$, то функции $u$ и $v$ получат приращения $\Delta u$ и $\Delta v$. Тогда $y+\Delta y=(u+\Delta u)(v+\Delta v)$.

2. $\Delta y=(u+\Delta u)(v+\Delta v)-uv=v\Delta u+u\Delta v+\Delta u\Delta v$.

3. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{v\Delta u}{\Delta x}+\dfrac{u\Delta v}{\Delta x}+\dfrac{\Delta u\Delta v}{\Delta x}$.

4. $$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{v\Delta u}{\Delta x}+\frac{u\Delta v}{\Delta x}+\frac{\Delta u\Delta v}{\Delta x}\right)=$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v\Delta u}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u\Delta v}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u\Delta v}{\Delta x}.$$

Т.к. $u=u(x)$ и $v=v(x)$ при фиксированном $x$ постоянны, то их можно вынести за знак предела.

Заметим, что $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta u=0$, т.к. из дифференцируемости функции $u$ вытекает ее непрерывность. Поэтому, применяя теоремы о пределах, получаем

$$y'=v\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+u\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\Delta u\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}=u'v+uv'+0\cdot v'=u'v+uv'.$$

**Пример.** $y=\sin x\cdot e^x$, $y'=(\sin x)'\cdot e^x+\sin x\cdot\left(e^x\right)'=\cos x\cdot e^x+\sin x\cdot e^x$.

**Теорема.** *Производная частного двух дифференцируемых функции* $\frac{u}{v}$ *при условии, что знаменатель не равен нулю в области дифференцирования, вычисляется по формуле*

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-v'u}{v^2}.$$

**Доказательство.** 1. Если $x$ получит приращение $\Delta x$, то функции $u$ и $v$ получат приращения $\Delta u$ и $\Delta v$. При этом $y+\Delta y=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}$.

2. $\Delta y=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}-\frac{u}{v}=\frac{v\Delta u-u\Delta v}{(v+\Delta v)v}$.

3. $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{v\Delta u-u\Delta v}{\Delta x}}{v(v+\Delta v)}=\frac{v\frac{\Delta u}{\Delta x}-u\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v+\Delta v)}$.

4. $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{v\frac{\Delta u}{\Delta x}-u\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v+\Delta v)}=\frac{v\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}-u\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v\lim\limits_{\Delta x\to 0}(v+\Delta v)}$.

Заметив, что $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta v=0$, т.к. $v$ дифференцируемая и, следовательно, непрерывная функция, получаем $y'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$.

**Пример.** $y=\frac{x^3}{e^x}$; $y'=\frac{\left(x^3\right)'\cdot e^x-\left(e^x\right)'\cdot x^3}{\left(e^x\right)^2}=\frac{3x^2\cdot e^x-x^3\cdot e^x}{e^{2x}}=\frac{3x^2-x^3}{e^x}$.

## 7.7. Производная обратной функции

Пусть на интервале $(a;b)$ задана строго монотонная непрерывная функция $y=f(x)$. Пусть образ $(a;b)$ есть интервал $(A;B)$. Тогда обратная к $f$ функция $x=\varphi(y)$ есть однозначная, непрерывная и строго монотонная на $(A;B)$ функция.

Зафиксируем $x \in (a; b)$ и дадим ему приращение так, чтобы $x + \Delta x \in (a; b)$. Тогда $f$ получит соответствующее приращение $\Delta y$: $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$.

Наоборот, $\varphi(y + \Delta y) = x + \Delta x$.

Вследствие непрерывности прямой и обратной функций для указанных $\Delta x$ и $\Delta y$ имеет место утверждение: из $\Delta x \to 0$ следует $\Delta y \to 0$ и, наоборот, если $\Delta y \to 0$, то и $\Delta x \to 0$.

Пусть теперь функция $\varphi$ в точке $y$ имеет неравную нулю производную $\varphi'(y)$. Покажем, что в таком случае функция $f$ также имеет в соответствующей точке $x$ производную. В самом деле, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}}$. Т.к. из того, что $\Delta x \to 0$, следует, что $\Delta y \to 0$, то $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{\varphi'(y)}$, и мы получили $f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)}$ или

$$y'_x = \frac{1}{x'_y}. \qquad (8.7.1)$$

Таким образом мы доказали следующую теорему.

**Теорема.** *Пусть $y = f(x)$ есть строго монотонная непрерывная функция, $x = \varphi(y)$ – обратная к ней функция, имеющая в точке $y$ производную $\varphi'(y) \neq 0$. Тогда функция $f$ имеет в соответствующей точке $x$ производную, определяемую формулой* (*8.7.1*).

**Замечание.** Может случиться, что в точке $y$ $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \infty$. В этом случае функция $f$ имеет в точке $x$ производную $f'(x) = 0$.

## 7.8. Производная сложной функции

Пусть $y = f(u)$, а $u = \varphi(x)$. Тогда $y$ есть сложная функция $x$: $y = f(\varphi(x))$.

Как найти производную сложной функции $y'_x$, зная производную $y'_u$ и производную $u'_x$?

**Теорема.** *Если функция $u = \varphi(x)$ имеет производную $u'_x$ в точке $x$, а функция $y = f(u)$ имеет производную $y'_u$ в соответствующей точке $u$,*

*то сложная функция* $y = f\left(\varphi(x)\right)$ *в данной точке* $x$ *имеет производную* $y'_x$*, которая находится по формуле:*

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x \qquad (8.8.1)$$

**Доказательство.**

1. Дадим $x$ приращение $\Delta x$. Тогда $u$ и $y$ получат соответственно приращения $\Delta u$ и $\Delta y$. Будем предполагать, что при $\Delta x \neq 0$ и $\Delta u \neq 0$.

2. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \dfrac{\Delta u}{\Delta x}$.

3. Пусть $\Delta x \to 0$. Т.к. функция $u = \varphi(x)$ дифференцируема в точке $x$, то

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \varphi'(x) \text{ и } \lim_{\Delta x \to 0} \Delta u = 0,$$

поскольку из дифференцируемости функции следует ее непрерывность.

Т.к. функция $y = f(u)$ дифференцируема в точке $u$, то $\lim\limits_{\Delta u \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta u} = f'(u)$

Поэтому, применяя теорему о пределе произведения, получаем

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left( \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = f'(u) \cdot \varphi'(x) = y'_u \cdot u'_x.$$

**Пример.** Найдем производную функции $y = e^{3x^2+5}$. Данная функция является сложной. Обозначим $u = 3x^2 + 5$, тогда $y = e^u$. По формуле (8.8.1) получаем $y'_x = \left(e^u\right)'_u \cdot \left(3x^2 + 5\right)'_x = e^u \cdot 6x$, или, поскольку $u = 3x^2 + 5$, окончательно $y'_x = e^{3x^2+5} \cdot 6x = 6x \cdot e^{3x^2+5}$.

Сложная функция может быть составлена не из двух звеньев, как это было в только что рассмотренном примере, а из большего их числа. В таких случаях необходимо ясно представить себе, какое из действий, приводящих к значению сложной функции, является последним. При дифференцировании сложной функции та величина, над которой совершается последнее действие, принимается за промежуточный аргумент $u$. При этом цепочка вложенных функций постепенно дифференцируется.

**Пример.** Пусть $y = \sin\left(e^{x^3}\right)$. Найти производную этой функции.

Последним действием является вычисление синуса. Это действие совершается над функцией $e^{x^3}$. Поэтому принимаем за промежуточный аргумент $u = e^{x^3}$. Тогда $y = \sin u$ и

$$y'_x = (\sin u)'_u \cdot u'_x = \cos\left(e^{x^3}\right) \cdot \left(e^{x^3}\right)'_x .$$

Функция $e^{x^3}$ также является сложной. Положим теперь $u = x^3$ и снова применим формулу (8.8.1).

$$\left(e^{x^3}\right)'_x = \left(e^u\right)'_u \cdot \left(x^3\right)'_x = e^u \cdot 3x^2 = e^{x^3} \cdot 3x^2 .$$

Окончательно имеем

$$\left(\sin e^{x^3}\right)' = \cos\left(e^{x^3}\right) \cdot e^{x^3} \cdot 3x^2 .$$

## 7.9. Производные элементарных функций

Выведем некоторые формулы для вычисления производных основных элементарных функций. Остальные формулы таблицы производных приведем без доказательства. Предлагаем доказать их самостоятельно в качестве упражнения.

*I. Производная постоянной* $y = C$.

1. $y + \Delta y = C$.
2. $\Delta y = C - C = 0$.
3. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 0$.
4. $C' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{0}{\Delta x} = 0$.

**Следствие.** *Постоянный множитель можно выносить за знак производной:*

$$(Cu)' = Cu', C = const .$$

**Доказательство.** По формуле дифференцирования произведения находим $(Cu)' = C'u + Cu' = 0 \cdot u + Cu' = Cu'$.

*II. Производная функции* $y = x$.

1. $y + \Delta y = x + \Delta x$.
2. $\Delta y = \Delta x$.
3. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 1$.
4. $x' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} 1 = 1$.

*III. Производная функции* $y = \sin x$ выведена выше.

*IV. Производная функции* $y = \cos x$. Используем правило дифференцирования сложной функции. Имеем:

$$y=\cos x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right),\ y'=\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)'=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot(-1)=-\sin x.$$

*V. Производная функции* $y=\operatorname{tg}x$.

Т.к. эта функция может быть представлена в виде дроби $\operatorname{tg}x=\frac{\sin x}{\cos x}$, то ее производная находится по формуле дифференцирование частного от двух функций.

$$(\operatorname{tg}x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}.$$

*VI. Производная функции* $y=\operatorname{ctg}x$.

$$(\operatorname{ctg}x)'=\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)'=\frac{(\cos x)'\sin x-\cos x(\sin x)'}{\sin^2 x}=\frac{-\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^2 x}=-\frac{1}{\sin^2 x}$$

*VII. Производная логарифмической функции* $y=\log_a x$.

1. $y+\Delta y=\log_a(x+\Delta x)$.

2. $\Delta y=\log_a(x+\Delta x)-\log_a x=\log_a\frac{x+\Delta x}{x}=\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)$.

3. $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\Delta x}\cdot\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)=\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{\Delta x}\cdot\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)=\frac{1}{x}\cdot\frac{\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}}$.

4. $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}=\frac{1}{x}\lim\limits_{\Delta x\to 0}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}$.

Т.к. логарифмическая функция непрерывна, то можно перейти от предела логарифма к логарифму предела: $y'=\frac{1}{x}\log_a\left(\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right)$.

Применяя второй замечательный предел $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}=e$, получаем

$y'=\frac{1}{x}\log_a e$, или, поскольку, $\log_a e=\frac{1}{\ln a}$, $(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$.

В частности, при $a=e$ имеем $(\ln x)'=\frac{1}{x}$.

*VIII. Производная показательной функции* $y = a^x$.

Воспользуемся правилом дифференцирования обратной функции. Если $y = a^x$, то $x = \log_a y$. Отсюда $y'_x = \dfrac{1}{x'_y} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{y \ln a}} = y \ln a = a^x \ln a$.

В частности, при $a = e$ получаем, что $\left(e^x\right)' = e^x$.

*IX. Производная степенной функции* $y = x^\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$).

Считая $x$ положительным числом, воспользуемся тождеством $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$.

Тогда $y = e^{\alpha \ln x}$ есть сложная функция $x$, и ее производная находится так:

$$y' = \left(e^{\alpha \ln x}\right)' = e^{\alpha \ln x} \cdot \alpha \left(\ln x\right)' = \alpha \cdot e^{\alpha \ln x} \cdot \frac{1}{x}.$$

Т.к. $e^{\alpha \ln x} = x^\alpha$, то $y' = x^\alpha \cdot \dfrac{\alpha}{x} = \alpha \cdot x^{\alpha - 1}$.

*X. Производная функции* $y = \arcsin x$.

Рассмотрим обратную функцию $x = \sin y$, $y \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$. Эта функция в интервале $y \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$ монотонная и дифференцируемая, а ее производная $x' = \cos y$ в этом интервале в нуль не обращается.

Следовательно, по правилу дифференцирования обратной функции получим $y'_x = \dfrac{1}{x'_y} = \dfrac{1}{\cos y}$. Но $\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$ при $y \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Таким образом, при $x \neq \pm 1$ $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$. А при $x = \pm 1$ $y'$ не существует.

*XI. Производная функции* $y = \operatorname{arctg} x$.

Эта функция по определению должна удовлетворять условию $y \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$. При этом обратная функция $x = \operatorname{tg} y$ монотонна и дифференцируема.

Находим сначала $x'_y = \dfrac{1}{\cos^2 y}$. Следовательно, согласно формуле дифференцирования обратной функции, имеем $y'_x = \cos^2 y = \dfrac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y} = \dfrac{1}{1 + x^2}$.

## 7.10. Таблица основных формул дифференцирования

1. $(C)' = 0$;
2. $x' = 1$;
3. $\left(x^{\alpha}\right)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$;
4. $(\sin x)' = \cos x$;
5. $(\cos x)' = -\sin x$;
6. $(\mathrm{tg}x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$;
7. $(\mathrm{ctg}x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$;
8. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$;
9. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$;
10. $\left(a^x\right)' = a^x \ln a$;
11. $\left(e^x\right)' = e^x$;
12. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
13. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
14. $(\mathrm{arctg}x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$;
15. $(\mathrm{arcctg}x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

## 7.11. Логарифмическое дифференцирование

Так называется прием дифференцирования, при котором производные от заданной функции отыскиваются с помощью производной от ее логарифма.

Пусть $y = f(x)$. Тогда $\ln y = \ln f(x)$. Продифференцируем полученное равенство

$$\frac{y'}{y} = \left(\ln f(x)\right)'.$$

Отсюда $y' = y \cdot \left(\ln f(x)\right)'$.

Обычно этот прием применяется для дифференцирования функций вида $y = \left(\varphi(x)\right)^{g(x)}$.

**Пример.** Найти производную функции $y = x^{\sin x}$.

**Решение.** $\ln y = \ln x^{\sin x} = \sin x \cdot \ln x$,

$$(\ln y)'_x = \frac{y'}{y} = (\sin x \cdot \ln x)' = \cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x}.$$

Окончательно имеем: $y' = x^{\sin x}\left(\cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \dfrac{1}{x}\right)$.

Логарифмическое дифференцирование может быть применено для отыскания производных от произведения или частного нескольких функций, что упрощает вычисления.

**Пример.** Найти производную функции $y = 2^x \cdot \sqrt{x^2+4} \cdot \sin^2 x$.

**Решение.** $\ln y = \ln\left(2^x \cdot \sqrt{x^2+4} \cdot \sin^2 x\right) = \ln 2^x + \ln\sqrt{x^2+4} + \ln\sin^2 x =$

$$= x\ln 2 + \frac{1}{2}\ln\left(x^2+4\right) + 2\ln\sin x.$$

$$y' = y\left(x\ln 2 + \frac{1}{2}\ln\left(x^2+4\right) + 2\ln\sin x\right)' =$$

$$= 2^x \cdot \sqrt{x^2+4} \cdot \sin^2 x\left(\ln 2 + \frac{x}{x^2+4} + 2\mathrm{ctg}x\right).$$

## 7.12. Производные высших порядков

Пусть функция $f(x)$ имеет производную $f'(x)$ в некотором интервале изменения независимой переменной $x$. Эта производная $f'(x)$ сама, в свою очередь, является функцией. Производная от $f'(x)$, если она существует, называется второй производной или производной второго порядка от $f(x)$ и обозначается $f''(x) = \left(f'(x)\right)'$.

Таким же образом производной третьего порядка или третьей производной $f'''(x)$ от функции $f(x)$ называется производная от производной второго порядка. Дадим общее определение.

**Определение.** Производной $n$-го порядка $f^{(n)}(x)$ называется производная от производной $(n-1)$-го порядка: $f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'$.

**Пример.** Найти третью производную функции $y = x^5$.

**Решение.** $y' = 5x^4$, $y'' = 20x^3$, $y''' = 60x^2$.

**Пример.** Найти вторую производную функции $y = x^{\frac{3}{2}}$, $x \in [0; +\infty)$.

**Решение.** $y' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$, $y'' = \left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{2}}$. Вторая производная не определена при $x = 0$.

Выясним механический смысл второй производной.

Пусть материальная точка движется прямолинейно по закону $S = S(t)$. Тогда скорость $v$ этого движения есть некоторая функция времени:

$\upsilon = \upsilon(t)$. В момент времени $t_0$ скорость имеет значение $\upsilon_0 = \upsilon(t_0)$. Рассмотрим другой момент времени $t_0 + \Delta t$. Ему соответствует значение скорости $\upsilon = \upsilon(t_0 + \Delta t)$. Приращению времени $\Delta t$ соответствует приращение скорости $\Delta\upsilon = \upsilon - \upsilon_0 = \upsilon(t_0 + \Delta t) - \upsilon(t_0)$.

Отношение $\dfrac{\Delta\upsilon}{\Delta t}$ называется средним ускорением за промежуток времени $\Delta t$.

**Определение.** Ускорением $w$ в момент времени $t_0$ называется предел среднего ускорения при $\Delta t \to 0$: $w = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\upsilon}{\Delta t} = \upsilon'_t$.

Учитывая, что скорость $\upsilon$ есть производная пути $S$ по времени $t$, получаем, что ускорение прямолинейного движения точки есть вторая производная пути по времени: $w = \upsilon'_t = (S')' = S''$.

*Контрольные вопросы*

1. Дайте определение производной функции в точке.
2. В чем заключается механический смысл производной?
3. В чем заключается экономический смысл производной?
4. В чем заключается геометрический смысл производной?
5. Выведите уравнения касательной и нормали к графику функции в точке.
6. Какая функция называется дифференцируемой?
7. В чем заключается условие дифференцируемости функции в точке?
8. Как связаны непрерывность и дифференцируемость функции в одной и той же точке?
9. Запишите формулы для вычисления производной суммы, произведения и частного двух функций.
10. Сформулируйте теорему о производной обратной функции.
11. Сформулируйте теорему о производной сложной функции.
12. Запишите таблицу производных.
13. Докажите формулы из таблицы производных.
14. Дайте определение производных высших порядков.

# 8. ДИФФЕРЕНЦИАЛ

## 8.1. Определение и геометрический смысл дифференциала

Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке $x$, то ее приращение $\Delta y$ в этой точке можно представить в виде

$$\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x, \qquad (9.1.1)$$

где $\alpha(\Delta x)$ – бесконечно малая при $\Delta x \to 0$.

**Определение.** Главная часть приращения функции $f'(x) \cdot \Delta x$, пропорциональная приращению аргумента, называется дифференциалом этой функции.

Дифференциал функции $y = f(x)$ обозначается символом $dy$. Итак, по определению

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x. \qquad (9.1.2)$$

Найдем дифференциал функции $y = x$.

В этом случае $y' = x' = 1$, и, следовательно, $dy = dx = \Delta x$ или $dx = \Delta x$. Таким образом, дифференциал $dx$ независимой переменной $x$ совпадает с его приращением. Тогда формулу (9.1.2) мы можем записать так

$$dy = f'(x)dx.$$

Отсюда следует, что $f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$.

**Пример.** Найти дифференциал $dy$ функции $y = \cos x$.

**Решение.** $dy = (\cos x)' dx = -\sin x \cdot dx$.

Выясним геометрический смысл дифференциала. Рассмотрим график дифференцируемой функции $y = f(x)$ (рис. 63).

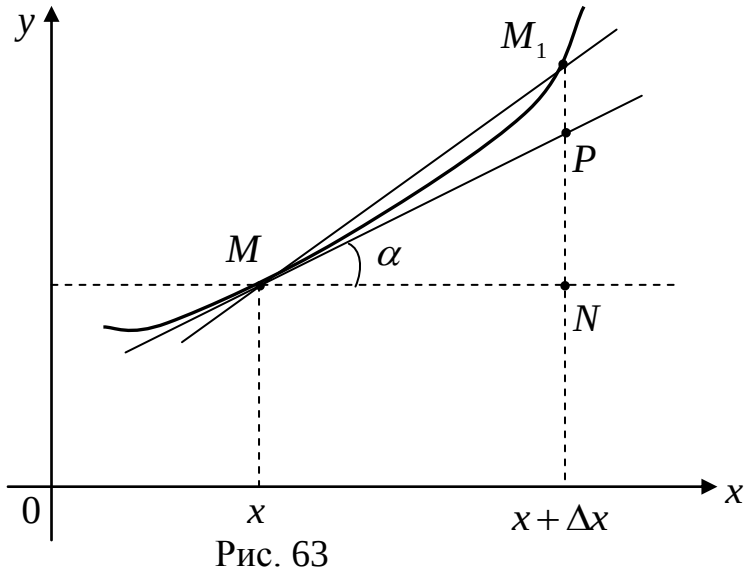



Рис. 63

Точка $M_1$ имеет координаты $(x+\Delta x;\ y+\Delta y)$. Приращение функции в точке $x$: $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$ равно длине отрезка $M_1N$. С другой стороны, $M_1N = M_1P + PN$, где $PN = \mathrm{tg}\alpha \cdot \Delta x = f'(x)\cdot \Delta x$. Таким образом, отрезок $PN$ есть дифференциал функции $f$ в точке $x$: $PN = dy = f'(x)\cdot \Delta x$.

Следовательно, дифференциал функции, соответствующий данным значениям $x$ и $\Delta x$, равен приращению ординаты касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$ в точке $x$.

## 8.2. Свойства дифференциала

1. Дифференциал алгебраической суммы дифференцируемых функций равен сумме дифференциалов этих функций: $d(u+v) = du + dv$.

**Доказательство.** $d(u+v) = (u+v)'\,dx = u'dx + v'dx = du + dv$.

2. Дифференциал произведения двух дифференцируемых функций $u$ и $v$ определяется формулой $d(u\cdot v) = du\cdot v + dv\cdot u$.

**Упражнение.** Доказать самостоятельно.

3. Дифференциал частного двух дифференцируемых функций $u$ и $v$ при условии, что $v \neq 0$, находится по формуле $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{du\cdot v - dv\cdot u}{v^2}$.

**Доказательство.**

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \left(\frac{u}{v}\right)' dx = \frac{u'v - v'u}{v^2}dx = \frac{(u'dx)v - (v'dx)u}{v^2} = \frac{du\cdot v - dv\cdot u}{v^2}.$$

**Пример.** Найти дифференциал функции $y = x\cdot \mathrm{tg}x$.

**Решение.**

$$dy = dx\cdot \mathrm{tg}x + d(\mathrm{tg}x)\cdot x = \mathrm{tg}x dx + \frac{1}{\cos^2 x}dx\cdot x = \mathrm{tg}x dx + \frac{x}{\cos^2 x}dx =$$

$$= \left(\mathrm{tg}x + \frac{x}{\cos^2 x}\right)dx.$$

4. Найдем дифференциал сложной функции.

Пусть $y = f(u)$, а $u = \varphi(x)$ – дифференцируемые функции своих аргументов. Используя формулу дифференцирования сложной функции (см. п. 1.8): $dy = y'_x \cdot dx = f'_u \cdot \varphi'_x \cdot dx$. Но $\varphi'_x \cdot dx = du$, и значит, $dy = f'_u \cdot du$, т.е. дифференциал $dy$ имеет такой же вид, как если бы величина $u$ была независимой переменной.

Это свойство называется инвариантностью формы дифференциала. Всегда можно, не интересуясь природой аргумента, записать дифференциал функции в одном и том же виде.

**Пример.** Найти дифференциал функции $y = \ln^2 x$.

**Решение.** $dy = \left(\ln^2 x\right)' dx = 2\ln x \cdot \frac{1}{x} \cdot dx$.

А можно записать и так: $dy = 2\ln x d\left(\ln x\right)$.

## 8.3. Дифференциалы высших порядков

Дифференциал $dy$ функции $y = f\left(x\right)$ есть функция двух переменных: независимой переменной $x$ и ее дифференциала $dx$. Причем, дифференциал $dx$ независимой переменной $x$ есть величина, не зависящая от $x$, т.к. приращение в данной точке $x$ можно выбирать независимо от этой точки.

Рассматривая $dy = f'\left(x\right)dx$ только как функцию $x$ (т.е. считая $dx$ постоянным), можно найти дифференциал этой функции. Этот дифференциал, если он существует, называется дифференциалом второго порядка или вторым дифференциалом от функции $y = f\left(x\right)$ и обозначается $d^2 y$: $d^2 y = d\left(dy\right)$.

Аналогично определяются и находятся дифференциалы третьего, четвертого и более высоких порядков.

**Определение.** Дифференциалом $n$-го порядка $d^n y$ называется дифференциал от дифференциала $\left(n-1\right)$-го порядка $d^n y = d\left(d^{n-1} y\right)$.

**Утверждение.** Дифференциал $n$-го порядка равен произведению производной $n$-го порядка по независимой переменной на $n$-ю степень дифференциала независимой переменной:

$$d^n y = f^{(n)}\left(x\right)\left(dx\right)^n. \qquad (9.3.1)$$

**Доказательство.**

$$d^n y = \left(d^{n-1} y\right)' dx = \left(f^{(n-1)}\left(x\right)\left(dx\right)^{n-1}\right)' dx = f^{(n)}\left(x\right)\left(dx\right)^n.$$

Из формулы (9.3.1) следует, что $f^{(n)}\left(x\right) = \frac{d^n y}{dx^n}$.

**Замечание.** Ранее было показано, что дифференциал первого порядка обладает свойством инвариантности. Дифференциалы высших порядков $\left(n > 1\right)$ уже не обладают этим свойством. В самом деле, предположим, что $x$ есть не независимая переменная, а функция: $x = \varphi\left(t\right)$. Тогда $dx$ также будет функцией от $t$, и мы не сможем считать $dx$ постоянным при дифференцировании первого дифференциала. А именно, взяв дифференциал от $dy$ на основании правила дифференцирования произведения, получим

$$d^2y = d\left(f'(x)dx\right) = d\left(f'(x)\right)dx + f'(x)d(dx) = f''(x)(dx)^2 + f'(x)d^2x.$$

Как видим, появился добавочный член $f'(x)d^2x$. Он обращается в нуль, если $x$ – независимая переменная: $d^2x = x''(dx)^2 = 0\cdot(dx)^2 = 0$.

*Контрольные вопросы*

1. Дайте определение дифференциала функции.
2. Каков геометрический смысл дифференциала?
3. Сформулируйте свойства дифференциала.
4. Дайте определение дифференциалов функции высших порядков.

# 9. ПРИЛОЖЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ

## 9.1. Некоторые теоремы о дифференцируемых функциях

**Определение.** Говорят, что функция $y = f(x)$ достигает в точке $x_0$ локального максимума (минимума), если $f(x) < f(x_0)$ $\left(f(x) > f(x_0)\right)$ для любой точки $x \neq x_0$ из некоторой окрестности точки $x_0$.

Локальный максимум (минимум) называется экстремумом функции.

**Замечание.** Если функция $f(x)$ имеет в точке $x_0$ максимум (минимум), то это еще не означает, что в этой точке функция имеет наибольшее (наименьшее) значение во всей области ее определения. Из определения экстремума следует только то, что это самое большое (маленькое) значение функции в точках, достаточно близких к точке $x_0$.

**Замечание.** Из определения следует, что функция, определенная на **отрезке,** может достигать экстремума только в его внутренних точках.

**Замечание.** Функция может иметь несколько экстремумов в области определения.

**Теорема Ферма.** *Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в окрестности точки экстремума $x_0$, то ее производная в этой точке равна нулю:* $f'(x_0) = 0$.

**Доказательство.** Пусть, для определенности, функция $f(x)$ принимает в точке $x_0$ максимальное значение.

По определению производной $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$, где $\Delta x$ берется таким, чтобы точка $x_0 + \Delta x$ принадлежала рассматриваемой окрестности точки $x_0$, при этом приращение $\Delta x$ может принимать как положительные, так и отрицательные значения.

Рассмотрим отношение $\dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$. Т.к. в точке $x_0$ функция принимает максимальное значение, то при любом знаке $\Delta x$ имеем $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) < 0$.

Отсюда, если $\Delta x > 0$, то $\dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} < 0$ и, следовательно, по теореме о переходе к пределу в неравенствах

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \leq 0.$$

Если же $\Delta x < 0$, то $\dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} > 0$ и $f'(x_0) \geq 0$.

Таким образом, $f'(x_0)$ не может быть ни положительной, ни отрицательной. Значит $f'(x_0)=0$.

Геометрический смысл теоремы Ферма заключается в следующем: касательная к графику дифференцируемой функции в точках экстремума параллельна оси абсцисс (рис. 64), т.к. тангенс угла наклона касательной, проведенной к графику функции в этих точках, равен нулю.

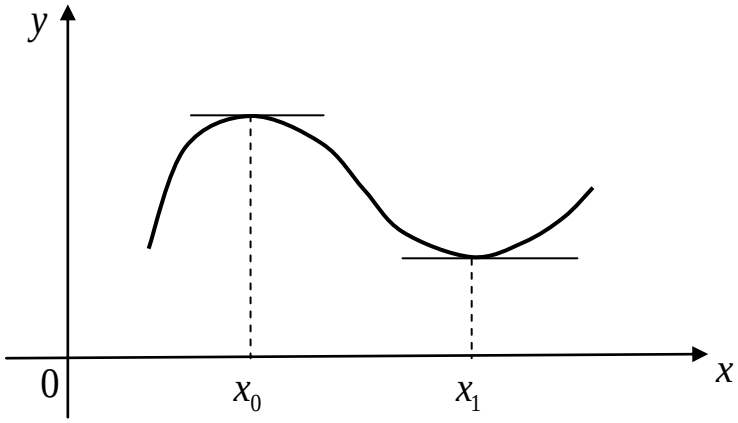



Рис. 64

Экономический смысл теоремы Ферма. Пусть дана функция прибыли $\pi(Q)$, выраженная через функции издержек $C(Q)$ и дохода $R(Q)$, где $Q$ – объем производства: $\pi(Q)=R(Q)-C(Q)$. Оптимальный объем производства $Q_0$ – это объем производства, при котором функция $\pi(Q)$ достигает максимума, а значит, по теореме Ферма, ее производная равна нулю. Значит, при таком объеме производства предельные издержки должны быть равны предельным доходам:

$$MC(Q_0)=MR(Q_0).$$

Это равенство выражает один из базовых экономических законов.

**Теорема Ролля.** *Если функция* $y=f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a;b]$, *дифференцируема во всех его внутренних точках и* $f(a)=f(b)$, *то существует хотя бы одна точка* $c\in(a;b)$ *такая, что* $f'(c)=0$.

**Доказательство.** Т.к. функция непрерывна на отрезке, то она достигает на этом отрезке своего наибольшего $M$ и наименьшего $m$ значения. Возможны два случая:

1) если $M=m$, то функция постоянна на отрезке $[a;b]$. Тогда ее производная равна нулю при всех значениях $x\in[a;b]$: $f'(x)=0$.

2) пусть теперь $M \neq m$ и пусть $f(x_M) = M$, $f(x_m) = m$. Т.к. $f(a) = f(b)$, а $f(x_M) > f(x_m)$, то либо точка $x_M$, либо точка $x_m$ лежит внутри отрезка $[a; b]$ (рис. 65). Ее мы и обозначим через $c$.

По теореме Ферма $f'(c) = 0$.

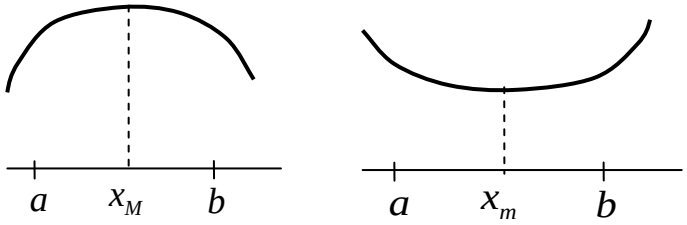



Рис. 65

Геометрический смысл теоремы Ролля: на дуге графика функции $y = f(x)$ между ее концами $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$, если $f(a) = f(b)$ найдется точка $c \in (a; b)$, в которой касательная параллельна оси абсцисс (рис. 66).

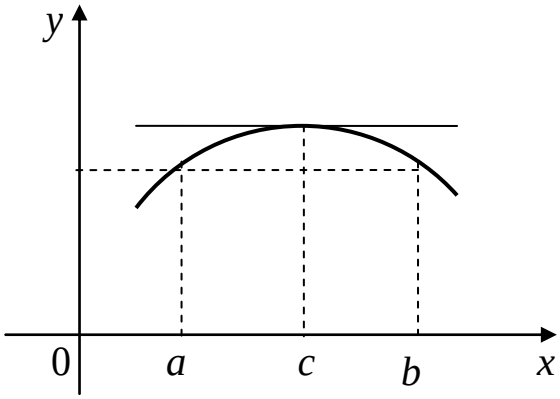



Рис. 66

**Теорема Лагранжа.** *Если функция* $y = f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a; b]$ *и дифференцируема во всех его внутренних точках, то на интервале* $(a; b)$ *существует хотя бы одна точка* $c$ *такая, что имеет место равенство:*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \qquad (10.1.1)$$

**Доказательство.** Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Она обладает следующими свойствами:

1) $F(x)$ непрерывна при $x \in [a; b]$;

2) $F(x)$ дифференцируема при $x \in (a; b)$;

3) $F(a) = F(b) = f(a)$.

Применим к $F(x)$ теорему Ролля: существует точка $c \in (a; b)$, в которой

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0. \qquad (10.1.2)$$

Отсюда $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

**Замечание.** Перепишем равенство (10.1.2) в виде

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Эта формула называется формулой конечных приращений.

Геометрически теорема Лагранжа означает следующее: пусть $AB$, где $A(a, f(a))$ и $B(b, f(b))$, – дуга графика непрерывной функции $y = f(x)$, имеющая в каждой точке невертикальную касательную. Тогда на дуге всегда найдется хотя бы одна точка $(c, f(c))$, в которой касательная будет параллельная хорде, стягивающей концы дуги $AB$. Это вытекает из того факта, что $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ представляет собой тангенс угла $\alpha$ наклона хорды, проходящей через точки $AB$ графика с абсциссами $a$ и $b$ (рис. 67).

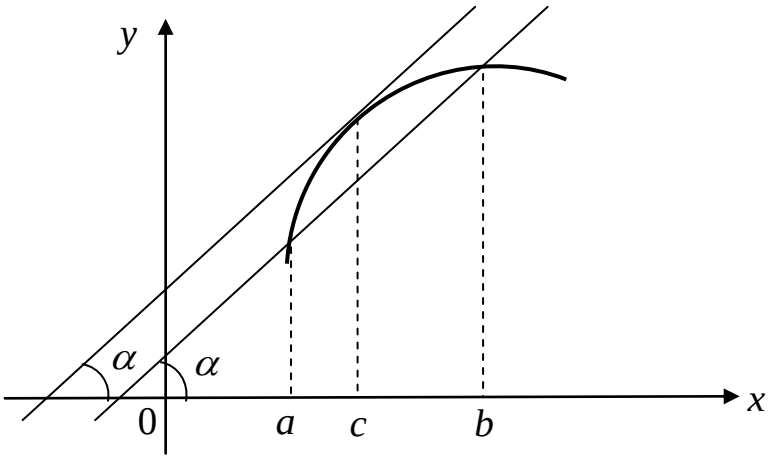



Рис. 67

**Теорема Коши.** *Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны на отрезке $[a; b]$ и дифференцируемы во всех его внутренних точках, причем $\varphi'(x) \neq 0$, то на интервале $(a; b)$ существует хотя бы одна точка $c$ такая, что имеет место равенство*

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}.$$

**Доказательство.** Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}\left(\varphi(x)-\varphi(a)\right).$$

Она обладает следующими свойствами:

1) $F(x)$ непрерывна при $x\in[a;b]$;

2) $F(x)$ дифференцируема при $x\in(a;b)$;

3) $F(a)=F(b)=f(a)$.

Применим к $F(x)$ теорему Ролля: существует точка $c\in(a;b)$ такая, что $F'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}\varphi'(c)=0$.

Отсюда $\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}$.

**Замечание.** Здесь буквой $\omega$ будем обозначать либо точку $x_0$, либо $+\infty$, либо $-\infty$, либо $\infty$.

## 9.2. Правило Лопиталя

**Теорема (правило Лопиталя I).** *Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны и имеют производные в окрестности точки $\omega$, за исключением, быть может, самой точки $\omega$. При этом $\varphi(x)$ и $\varphi'(x)$ не равны нулю в указанной окрестности и $\lim\limits_{x\to\omega} f(x)=\lim\limits_{x\to\omega}\varphi(x)=0$.*

*Тогда, если существует предел $\lim\limits_{x\to\omega}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=A$, то существует также предел $\lim\limits_{x\to\omega}\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, и $\lim\limits_{x\to\omega}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=A$.*

**Доказательство.** Пусть $\omega$ – число. Доопределим функции в нуле: пусть $f(\omega)=\lim\limits_{x\to\omega} f(x)=0$, $\varphi(\omega)=\lim\limits_{x\to\omega}\varphi(x)=0$. Тогда функции $f$ и $\varphi$ непрерывны в точке $\omega$.

Это свойство вместе со сформулированными в теореме свойствами позволяет применить к функциям $f$ и $\varphi$ теорему Коши.

Тогда $\lim\limits_{x\to\omega}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim\limits_{x\to\omega}\frac{f(x)-f(\omega)}{\varphi(x)-\varphi(\omega)}=\lim\limits_{x\to\omega}\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}$, где точка $c$ расположена между $\omega$ и $x$.

Если $x \to \omega$, то и $c \to \omega$ и поэтому $\lim\limits_{x\to\omega} \dfrac{f'(c)}{\varphi'(c)} = \lim\limits_{c\to\omega} \dfrac{f'(c)}{\varphi'(c)}$.

**Пример.** Найти $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{1+\cos 2x}{2x-\pi}$.

**Решение.** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2x) = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (2x-\pi) = 0$. Применим правило Лопиталя I:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{(1+\cos 2x)'}{(2x-\pi)'} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-2\sin 2x}{2} = 0 \text{. Значит, } \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2x}{2x-\pi} = 0.$$

Рассмотрим случай $\omega = \infty$ (или $\omega = +\infty$, или $\omega = -\infty$). Сделаем подстановку $x = \dfrac{1}{u}$. Тогда получим функции $F(u) = f\left(\dfrac{1}{u}\right)$, $\Phi(u) = \varphi\left(\dfrac{1}{u}\right)$ от $u$. Они непрерывны в окрестности точки 0 (при $\omega = +\infty$ или при $\omega = -\infty$ в правой или левой окрестностях точки 0), имеют производные по $u$ в этой окрестности и функция $\Phi$, так же как и $\Phi'$, не равна нулю в ней.

При этом $\lim\limits_{u\to 0} F(u) = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ и $\lim\limits_{u\to 0} \Phi(u) = \lim\limits_{x\to\infty} \varphi(x) = 0$. Далее, если существует $\lim\limits_{x\to\omega} \dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, то, используя утверждение, доказанное в части 1, имеем

$$\lim_{u\to 0} \frac{F'(u)}{\Phi'(u)} = \lim_{u\to 0} \frac{f'\left(\frac{1}{u}\right)\left(-\frac{1}{u^2}\right)}{\varphi'\left(\frac{1}{u}\right)\left(-\frac{1}{u^2}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

И, следовательно, $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim\limits_{u\to 0} \dfrac{F(u)}{\Phi(u)} = \lim\limits_{u\to 0} \dfrac{F'(u)}{\Phi'(u)} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$.

**Теорема (правило Лопиталя II).** *Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны и имеют производные в окрестности точки $\omega$, за исключением, быть может, точки $\omega$. При этом $\varphi(x)$ и $\varphi'(x)$ не равны нулю в указанной окрестности и $\lim\limits_{x\to w} f(x) = \lim\limits_{x\to w} \varphi(x) = \infty$ (или $+\infty$ или $-\infty$).*

*Тогда, если существует предел $\lim\limits_{x\to\omega} \dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A$, то существует также предел $\lim\limits_{x\to\omega} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$, и $\lim\limits_{x\to\omega} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = A$.*

Без доказательства.

**Замечание 1.** Если в условиях двух приведенных выше теорем $\lim\limits_{x\to\omega}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\infty$, то и $\lim\limits_{x\to\omega}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\infty$.

**Замечание 2.** Если отыскание предела отношения производных опять представляет собой неопределенность вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ или $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$, то можно снова применять правило Лопиталя I или II, т.е. перейти к отношению вторых производных и т.д.

**Пример.** Найти $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{e^x}$.

**Решение.** Применяя 2 раза правило Лопиталя II, находим $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{e^x}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{e^x}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{e^x}=0$.

**Замечание.** Если предела отношения производных не существует, то это не означает, что не существует предела отношения самих функций.

Приведем пример, когда отношение функций имеет предел, а отношение производных не стремится ни к какому числу. Так, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{\sin x}{x}\right)=1$. Однако, отношение $\dfrac{(x+\sin x)'}{(x)'}=1+\cos x$ при $x\to\infty$ не имеет предела.

## 9.3. Раскрытие других видов неопределенностей

Кроме рассмотренных случаев неопределенностей вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ или $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$ встречаются еще неопределенности других видов.

*1. Раскрытие неопределенности* $[\infty-\infty]$

Пусть $\lim\limits_{x\to w}f(x)=\infty$ и $\lim\limits_{x\to w}\varphi(x)=\infty$. Тогда $\lim\limits_{x\to w}\big(f(x)-\varphi(x)\big)=[\infty-\infty]$. Этот случай преобразованием выражения $f(x)-\varphi(x)$ сводится к неопределенности $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ или $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$.

**Примеры.** Найти: 1) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{1}{\cos x}-\mathrm{tg}x\right)$; 2) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{4}{\arcsin x}-\dfrac{1}{x}\right)$.

**Решение.** 1) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\cos x}-\mathrm{tg}x\right)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos x}$, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1-\sin x)=0$ и $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\cos x=0$. Применяем правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(1-\sin x)'}{(\cos x)'}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin x}=0.$$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{4}{\arcsin x}-\frac{1}{x}\right)=[\infty-\infty]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{4x-\arcsin x}{x\arcsin x}=\left[\frac{0}{0}\right]=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(4x-\arcsin x)'}{(x\arcsin x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{4-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\arcsin x+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}=\infty.$$

*2. Раскрытие неопределенности вида* $[0\cdot\infty]$

Под раскрытием такой неопределенности понимают нахождение предела $\lim\limits_{x\to w}\left(f(x)\cdot\varphi(x)\right)$, если $\lim\limits_{x\to w}f(x)=0$ и $\lim\limits_{x\to w}\varphi(x)=\infty$. Этот случай также преобразованием выражения $f(x)\cdot\varphi(x)$ сводится к раскрытию неопределенностей вида $\left[\frac{0}{0}\right]$ или $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

**Пример.** Найти: 1) $\lim\limits_{x\to 0+0}x\ln x$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x\cdot\ln x)$.

**Решение.** 1) $\lim\limits_{x\to 0+0}x\ln x=[0\cdot\infty]=\lim\limits_{x\to 0+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0+0}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=\lim\limits_{x\to 0+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=$

$$=\lim_{x\to 0+0}\frac{x^2}{-x}=\lim_{x\to 0+0}(-x)=0.$$

2) $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x\cdot\ln x)=[0\cdot\infty]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{\sin x}\right)'}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{\cos x}{\sin^2 x}}=-\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x\cos x}=-\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sin x}{\cos x}=-1\cdot 0=0.$$

*3. Раскрытие неопределенностей видов* $\left[1^{\infty}\right]$, $\left[0^{0}\right]$ и $\left[\infty^{0}\right]$

В этом случае функция предварительно логарифмируется. Сначала отыскивается предел логарифма заданной функции, а затем уже по пределу логарифма находится предел функции (что допустимо вследствие непрерывности логарифмической функции).

**Пример.** Найти $A=\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos x\right)^{\frac{1}{x^2}}=\left[1^{\infty}\right]$.

**Решение.** Пусть $A_1=\lim\limits_{x\to 0}\ln\left(\cos x\right)^{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(\cos x\right)}{x^2}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\ln\left(\cos x\right)\right)'}{\left(x^2\right)'}=\ =\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\mathrm{tg}x}{2x}=-\dfrac{1}{2}$. Но $A_1=\ln\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos x\right)^{\frac{1}{x^2}}=\ln A$.

Поэтому $A=e^{A_1}=e^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$.

**Пример.** Найти $A=\lim\limits_{x\to 0}\left(\mathrm{ctg}x\right)^{\frac{1}{\ln x}}=\left[\infty^{0}\right]$.

**Решение.** $A_1=\lim\limits_{x\to 0}\ln\left(\mathrm{ctg}x\right)^{\frac{1}{\ln x}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(\mathrm{ctg}x\right)}{\ln x}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\ln\left(\mathrm{ctg}x\right)\right)'}{\left(\ln x\right)'}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-x}{\cos x\sin x}=-1$. Тогда $A=e^{A_1}=e^{-1}=\dfrac{1}{e}$.

**Пример.** Вычислить $A=\lim\limits_{x\to 0}x^{x}=\left[0^{0}\right]$.

**Решение.**

$$A_1=\lim_{x\to 0}\ln x^{x}=\lim_{x\to 0}x\ln x=\left[0\cdot\infty\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\ln x\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=-\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x}=0\text{. Тогда } A=e^{A_1}=e^{0}=1.$$

## 9.4. Исследование функций

### *9.4.1. Признаки монотонности функции*

**Замечание.** В дальнейшем под словами «множество $X$» мы будем понимать множество, получающееся объединением конечного числа множеств вида $(a; b)$, $(a; +\infty)$, $(-\infty; b)$.

**Теорема (необходимое условие монотонности).**

*1) Если дифференцируемая функция $f(x)$ на множестве $X$ возрастает, то ее производная $f'(x)$ неотрицательна на этом множестве: $f'(x) \geq 0$.*

*2) Если дифференцируемая функция $f(x)$ на множестве $X$ убывает, то ее производная $f'(x)$ на этом множестве неположительна: $f'(x) \leq 0$.*

*3) Если дифференцируемая функция $f(x)$ на множестве $X$ сохраняет постоянное значение, то ее производная $f'(x)$ тождественно равна нулю: $f'(x) = 0$.*

**Доказательство.**

1) Пусть функция $f(x)$ на множестве $X$ возрастает, т.е. $f(x+\Delta x) > f(x)$, если $\Delta x > 0$, и $f(x+\Delta x) < f(x)$, если $\Delta x < 0$ для любого $x$ из рассматриваемого множества. Тогда отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} > 0$ и не зависит от знака $\Delta x$.

Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, получаем, что $f'(x) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \geq 0$.

2) Если $f(x)$ убывает, то отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ – величина отрицательная: $\frac{\Delta y}{\Delta x} < 0$. Но тогда

$$f'(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \leq 0.$$

3) Пусть $f(x) = c$. Тогда $f'(x) = 0$.

**Теорема (достаточное условие монотонности).** *Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и дифференцируема во всех его внутренних точках. Тогда:*

*1) если $f'(x)$ в интервале $(a; b)$ всюду положительна, то функция $f(x)$ в интервале $(a; b)$ возрастает;*

*2) если* $f'(x)$ *в интервале* $(a; b)$ *всюду отрицательна, то функция* $f(x)$ *в интервале* $(a; b)$ *убывает;*

*3) если* $f'(x)$ *в интервале* $(a; b)$ *всюду равна нулю, то функция* $f(x)$ *в интервале* $(a; b)$ *постоянна.*

**Доказательство.** Возьмем произвольные точки $x_1$ и $x_2$ такие, что $a \le x_1 < x_2 \le b$ и применим к отрезку $[x_1; x_2]$ формулу конечных приращений

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1),\ c \in (x_1; x_2).$$

1) Т.к. $x_2 - x_1 > 0$, $f'(c) > 0$, то $f(x_2) - f(x_1) > 0$ и, следовательно, $f(x_2) > f(x_1)$ при $x_2 > x_1$. Но это и означает, что функция $f(x)$ возрастает.

2) Если $f'(c) < 0$, то $f(x_2) - f(x_1) < 0$ и, следовательно, $f(x_2) < f(x_1)$ при $x_2 > x_1$, т.е. функция $f(x)$ убывает.

3) Если $f'(c) = 0$, следовательно, $f(x_2) = f(x_1)$ при любых $x_1$ и $x_2$, т.е. функция $f(x)$ постоянна.

**Пример.** Исследовать на монотонность функцию $y = 2x^3 + 3x^2 - 36x + 15$.

**Решение.** Область определения $D(y) = (-\infty; +\infty)$.

1. Находим производную $y' = 6x^2 + 6x - 36 = 6(x^2 + x - 6)$.

2. Находим корни производной: $y' = 6(x^2 + x - 6) = 0,\ x_1 = -3,\ x_2 = 2$.

3. Корни производной разбивают область определения функции на промежутки: $(-\infty; -3)$, $(-3; 2)$, $(2; +\infty)$ (рис. 68).

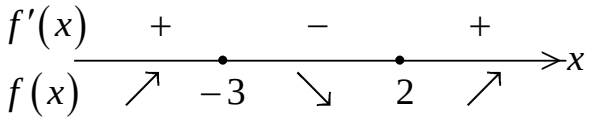



Рис. 68

На интервалах $(-\infty; -3)$ и $(2; +\infty)$ $f(x)$ возрастает, на интервале $(-3; 2)$ $f(x)$ убывает.

### *9.4.2. Экстремумы функции*

Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке экстремума $x_0$, то по теореме Ферма ее производная в этой точке равна нулю: $f'(x_0)=0$. Могут, однако, встретиться случаи, когда в точках экстремума функция не имеет производной. Так, например, для функции $f(x)=|x|$, график которой изображен на рис. 69, в точке $x_0=0$ не существует производной.

**Упражнение.** Показать, что $y=|x|$ при $x=0$ не имеет производной.

Но, очевидно, что в точке $x_0=0$ функция $y=|x|$ имеет минимум.

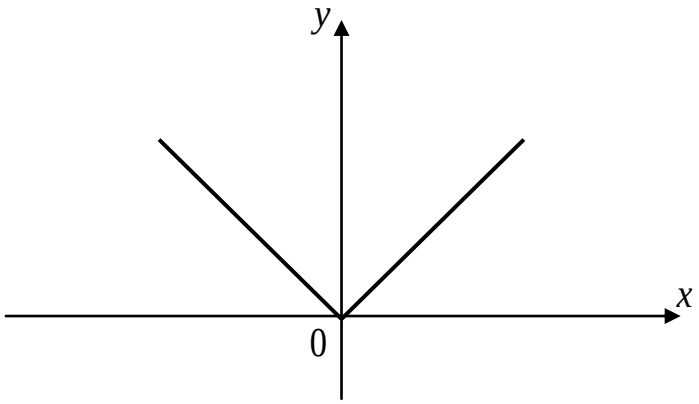



Рис. 69

Для функции $f(x)=1-\sqrt[3]{x^2}$, график которой изображен на рис. 70, производная $f(x)=-\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ при $x=0$ не существует. Однако функция в этой точке имеет максимум.

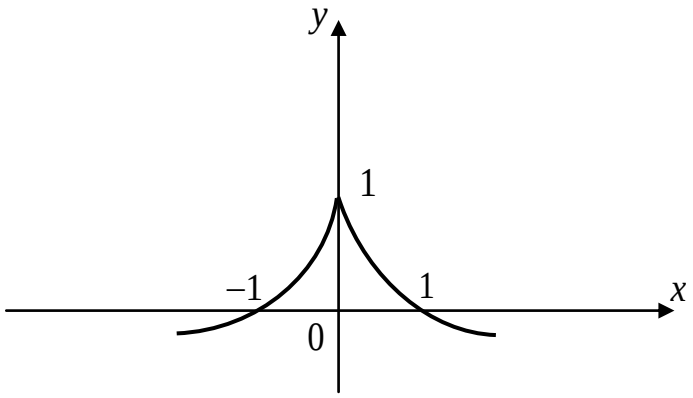



Рис. 70

Сформулируем теперь **необходимое условие экстремума:** *если в точке $x_0$ функция $f(x)$ достигает экстремума, то ее производная $f'(x)$ в этой точке либо равна нулю, либо не существует.*

**Замечание.** Данное условие не является достаточным для существования экстремума. Например, для функции $f(x)=x^3$ производная $f'(x)=3x^2$ обращается в нуль при $x=0$, однако при $x=0$ функция не имеет экстремума.

**Определение.** Значения аргумента $x=x_0$, при которых производная функции $f(x)$ обращается в нуль или не существует, называются критическими точками функции.

Таким образом, экстремум функции, если он существует, может иметь место только в критических точках. Однако не во всякой критической точке функция имеет экстремум.

**Теорема (первое достаточное условие экстремума).** *Пусть функция $f(x)$ непрерывна в некоторой окрестности критической точки $x_0$ и имеет в этой окрестности производную всюду, кроме, быть может, самой точки $x_0$, тогда:*

*если при $x<x_0$ производная $f'(x)$ положительна, а при $x>x_0$ – отрицательна, то $x_0$ – точка максимума;*

*если при $x<x_0$ производная $f'(x)$ отрицательна, а при $x>x_0$ – положительна, то $x_0$ – точка минимума.*

**Доказательство.** Пусть при $x<x_0$ производная $f'(x)>0$, это значит, что слева от точки $x_0$ находится некоторый интервал возрастания функции $f(x)$, примыкающий к точке $x_0$; при $x>x_0$ производная $f'(x)>0$, значит справа от точки $x_0$ находится некоторый примыкающий к ней интервал убывания функции. Следовательно, точка $x_0$ есть точка максимума.

Совершенно аналогично исследуется второй случай, когда производная меняет знак при переходе аргумента слева направо через точку $x_0$ с минуса на плюс (рис. 71).

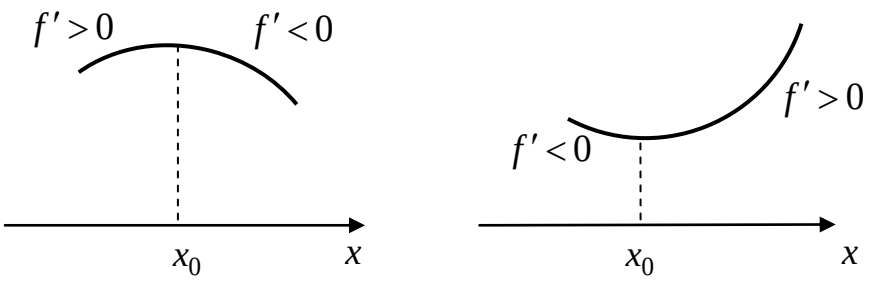



Рис. 71

**Замечание.** Если производная $f'(x)$ не меняет знака при переходе через критическую точку, то функция в этой точке не имеет ни максимума, ни минимума.

**Пример.** Исследовать на экстремум функцию $y=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x+1$.

**Решение.** 1) Находим производную $y=x^2-4x+3$.

2) Приравниваем производную к нулю и находим корни производной (критические точки): $x^2-4x+3=0$, $x_1=1$, $x_2=3$.

3) Последовательно исследуем каждую критическую точку. Результаты заносим в таблицу (табл. 2):

Таблица 2

| $x$ | $(-\infty;1)$ | 1 | $(1;3)$ | 3 | $(3;+\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | + | 0 | – | 0 | + |
| $y$ | ↗ | максимум | ↘ | минимум | ↗ |

**Теорема (второе достаточное условие экстремума).** *Если функция $f(x)$ имеет в точке $x_0$ первую производную, равную нулю $\left(f'(x_0)=0\right)$ и вторую производную, отличную от нуля $\left(f''(x_0)\neq 0\right)$, то $x_0$ – точка экстремума $f(x)$. При этом, если $f''(x_0)>0$, то $x_0$ – точка минимума, если $f''(x_0)<0$, то $x_0$ – точка максимума.*

**Пример.** Исследовать на экстремумы функцию $y=3x^3+4{,}5x^2-4x+1$.

**Решение.** 1) $y'=9x^2+9x-4$.

2) Найдем критические точки $y'=9x^2+9x-4=0$, $x_1=-\frac{4}{3}$, $x_2=\frac{1}{3}$.

3) $y''=18x+9$.

4) Определим знак второй производной $y''$ в критических точках: $y''\left(-\frac{4}{3}\right)<0$, значит $x=-\frac{4}{3}$ – точка максимума, $y''\left(\frac{1}{3}\right)>0 \Rightarrow x=\frac{1}{3}$ – точка минимума.

**Пример.** Исследовать на экстремумы функцию $y=\frac{e^x}{x+1}$.

**Решение.** $D(f)=(-\infty;-1)\cup(-1;+\infty)$.

1) $y'=\frac{e^x(x+1)-e^x}{(x+1)^2}=\frac{xe^x}{(x+1)^2}$.

2) Найдем критические точки: $y'=0$ при $x=0$; $y'$ не существует при $x=-1$ (это точка разрыва, в ней экстремума быть не может).

3) $$y''=\frac{\left(e^x+xe^x\right)\left(x+1\right)^2-2xe^x\left(x+1\right)}{\left(x+1\right)^4}=\frac{e^x\left(x+1\right)\left(\left(x+1\right)^2-2x\right)}{\left(x+1\right)^4}=$$

$$=\frac{e^x\left(x^2+1\right)}{\left(x+1\right)^3}.$$

4) Определим знак второй производной $y''$ в критической точке: $y''\left(0\right)=1>0$. Значит $x=0$ – точка минимума.

**Пример.** Зависимость выручки фирмы $TR$ от объема производства $Q$ задается формулой $TR=200Q-Q^2$, зависимость издержек $TC$ от объема производства – формулой $TC=Q^3-51Q^2-600Q+4000$. Определить, при каком объеме производства фирма получит максимальную прибыль.

**Решение.** Прибыль определяется функцией:

$$\pi=TR-TC=\left(200Q-Q^2\right)-$$

$$-\left(Q^3-51Q^2-600Q+4000\right)=-Q^3+50Q^2+800Q-4000.$$

Тогда предельная прибыль $M\pi=\pi'=-3Q^2+100Q+800$. Критические точки функции прибыли находим из уравнения $\pi'=-3Q^2+100Q+800=0$:

$$3Q^2-100Q-800=0,\ Q_1=40,\ Q_2=-\frac{20}{3}.$$

Значение $Q_2$ не подходит по смыслу задачи $\left(Q>0\right)$.

Вторая производная $\pi''=-6Q+100$.

Определим знак второй производной в точке $Q=40$: $\pi''\left(40\right)=-140<0$, значит, в точке $Q=40$ прибыль максимальна.

Таким образом, максимальная прибыль в размере 44 000 будет получена фирмой при объеме производства $Q=40$.

### *9.4.3. Выпуклость графика функции*

**Определение.** График дифференцируемой функции $f\left(x\right)$ называется выпуклым вверх (выпуклым) на интервале $\left(a;b\right)$, если он расположен не выше любой своей касательной.

**Определение.** График дифференцируемой функции $f\left(x\right)$ называется выпуклым вниз (вогнутым) на интервале $\left(a;b\right)$, если он расположен не ниже любой своей касательной (рис. 72).

**Определение.** Точка графика непрерывной функции, отделяющая его выпуклую вверх часть от выпуклой вниз, называется точкой перегиба.

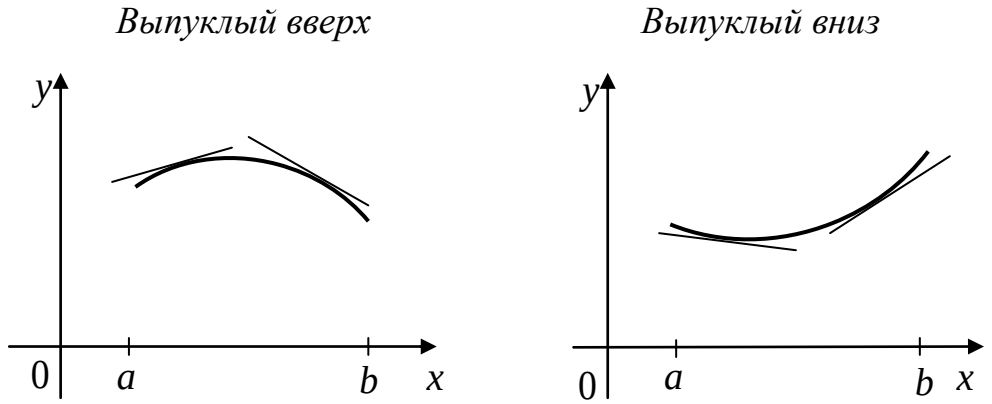



Рис. 72

**Теорема (достаточное условие выпуклости вверх (вниз) графика).** *Пусть функция* $f(x)$ *имеет вторую производную* $f''(x)$ *во всех точках интервала* $(a;b)$. *Если* $f''(x)<0$ *всюду в этом интервале, то график функции* $f(x)$ *выпуклый вверх, если же* $f''(x)>0$, *то – выпуклый вниз.*

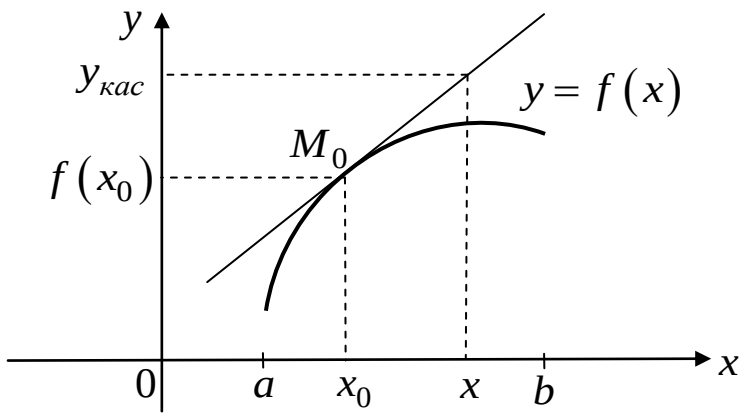



Рис. 73

**Доказательство.** Для определенности предположим, что $f''(x)<0$. Возьмем на графике функции произвольную точку $M_0$ с координатами $(x_0;\ f(x_0))$, $x_0 \in (a;b)$, и проведем через точку $M_0$ касательную (рис. 73).

Для доказательства теоремы мы должны установить, что график функции в интервале $(a;b)$ расположен ниже этой касательной, т.е. мы должны показать, что для одной и той же абсциссы $x$ ордината кривой меньше ординаты касательной.

Уравнение касательной $y_{кас} - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$, $y_{кас}$ – ордината касательной, соответствующая точке $x$. Разность ординат кривой и касательной при одной и той же абсциссе $x$ равна

$$y - y_{кас} = f(x) - \left(f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)\right) \text{ или}$$

$$y - y_{кас} = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0).$$

Разность $f(x) - f(x_0)$ преобразуем по формуле конечных приращений

$$f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0),$$

где $c$ заключено между $x_0$ и $x$. Тогда

$$y - y_{кас} = f'(c)(x - x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = (x - x_0)\left(f'(c) - f'(x_0)\right).$$

Разность $f'(c) - f'(x_0)$ снова преобразуем по формуле конечных приращений:

$$f'(c) - f'(x_0) = (c - x_0) f''(c_1),$$

где $c_1$ заключено между $c$ и $x_0$ и, следовательно, между $x_0$ и $x$. Получаем

$$y - y_{кас} = (x - x_0)(c - x_0) f''(c_1).$$

Разности $(x - x_0)$ и $(c - x_0)$ имеют одинаковый знак, т.к. $c$ заключено между $x_0$ и $x$. Следовательно, $(x - x_0)(c - x_0) > 0$.

Т.к. по условию $f''(c_1) < 0$, то $y - y_{кас} < 0$, т.е. $y < y_{кас}$.

Аналогично доказывается, что при $f''(x) > 0$ график выпуклый вниз.

**Теорема.** *Пусть функция $f(x)$ имеет в интервале $(a; b)$ непрерывную вторую производную $f''(x)$. Тогда если точка с абсциссой $x_0 \in (a; b)$ является точкой перегиба, то $f''(x_0) = 0$.*

**Доказательство.** Предположим противное, т.е. что $f''(x_0) \neq 0$. Пусть, для определенности $f''(x_0) > 0$. Тогда в силу предположения о непрерывности второй производной она является положительной в некоторой окрестности точки $x_0$, и, следовательно, график функции в этой окрестности выпуклый вниз. Но это противоречит тому, что $x_0$ есть абсцисса точки перегиба. Полученное противоречие показывает, что $f''(x_0) = 0$.

**Замечание.** Могут встретиться случаи, когда в точке перегиба $x_0$ вторая производная непрерывной функции не существует.

Так, например, для функции $y = \sqrt[3]{x^5}$, $y'' = \dfrac{10}{9\sqrt[3]{x}}$. Очевидно, что $y'' < 0$ при $x \in (-\infty; 0)$ и $y'' > 0$ при $x \in (0; +\infty)$. Следовательно, $x = 0$ – точка перегиба. Однако в этой точке вторая производная не существует.

Сформулируем теперь **необходимое условие существования точки перегиба.** *Если в точке с абсциссой* $x_0$ *график непрерывной функции* $f(x)$ *имеет точку перегиба, то вторая производная* $f''(x)$ *либо равна нулю* $f''(x_0)=0$*, либо не существует.*

**Теорема (достаточное условие существования точки перегиба).** *Если вторая производная* $f''(x)$ *непрерывной функции* $f(x)$ *меняет знак при переходе через* $x_0$*, то точка с абсциссой* $x=x_0$ *является точкой перегиба графика функции.*

**Упражнение.** Доказать самостоятельно.

**Примеры.** Исследовать на выпуклость и точки перегиба функцию: а) $y=x^5+5x^4$; б) $y=\dfrac{x^3}{x+1}$.

**Решение.** а) $y'=5x^4+20x^3$, $y''=20x^3+60x^2$.

$y''=20x^3+60x^2=0$, $x_1=-3, x_2=0$.

Исследуем знак второй производной и результат занесем в таблицу (табл. 3).

Таблица 3

| $x$ | $(-\infty;-3)$ | $-3$ | $(-3;0)$ | $0$ | $(0;+\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y''$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $+$ |
| $y$ | график выпуклый вверх | точка перегиба | график выпуклый вниз | | график выпуклый вниз |

б) $y'=\dfrac{3x^2(x+1)-x^3}{(x+1)^2}=\dfrac{2x^3+3x^2}{(x+1)^2}$.

$$y''=\frac{(6x^2+6x)(x+1)^2-2(2x^3+3x^2)(x+1)}{(x+1)^4}=$$

$$=\frac{2x(x+1)(3x^2+6x+3-2x^2-3x)}{(x+1)^4}=\frac{2x(x^2+3x+3)}{(x+1)^3}.$$

$y''=0$ при $x=0$; $y''$ не существует при $x=-1$.

Исследуем знак второй производной и результат занесем в таблицу (табл. 4).

Таблица 4

| $x$ | $(-\infty; -1)$ | $-1$ | $(-1; 0)$ | $0$ | $(0; +\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y''$ | + | не существует | – | 0 | + |
| $y$ | график выпуклый вниз | | график выпуклый вверх | точка перегиба | график выпуклый вниз |

### *9.4.4. Асимптоты графика функции*

**Определение.** Асимптотой графика функции $f(x)$ называется прямая линия, обладающая тем свойством, что расстояние от точки на графике до прямой стремится к нулю при неограниченном удалении этой точки по графику от начала координат.

***Вертикальные асимптоты***

Пусть $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \infty$. Тогда из определения следует, что прямая $x = x_0$ есть асимптота.

Аналогично, если $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = \infty$, то прямая $x = x_0$ асимптота.

Таким образом, для отыскания вертикальных асимптот графика функции $f(x)$ надо найти значение $x = x_0$, при котором функция терпит бесконечный разрыв (хотя бы односторонний).

**Пример.** Найти вертикальные асимптоты графика функции $y = \dfrac{\ln x}{x}$.

**Решение.** Т.к. $\lim\limits_{x \to 0+0} \dfrac{\ln x}{x} = -\infty$, то прямая $x = 0$ есть асимптота.

***Наклонные асимптоты***

Уравнение наклонной асимптоты имеет вид $y = kx + b$. Для определения $k$ и $b$ поступим следующим образом. Возьмем на графике функции $f(x)$ точку $A(x;\ f(x))$. Тогда расстояние от асимптоты до точки $A$ равно $\rho(x) = \dfrac{|f(x) - kx - b|}{\sqrt{1 + k^2}}$. По условию $\lim\limits_{x \to +\infty} \rho(x) = 0$. Отсюда $\lim\limits_{x \to +\infty} \left( f(x) - kx - b \right) = 0$.

Поэтому $\lim\limits_{x \to +\infty} \left( \dfrac{f(x)}{x} - k - \dfrac{b}{x} \right) = 0 = \lim\limits_{x \to +\infty} \left( \dfrac{f(x)}{x} - k \right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} - k$.

Следовательно,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=k. \qquad (10.4.2)$$

Если предел (3.4.2) существует, то определяем $b$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-kx\right) \qquad (10.4.3)$$

Если хотя бы один из пределов (10.4.2) или (10.4.3) не существует, то наклонной асимптоты нет.

В частном случае коэффициент $k$ в уравнении асимптоты может равняться нулю. В этом случае асимптота параллельна оси $OX$ и называется горизонтальной.

Аналогично определяются асимптоты при $x\to-\infty$.

**Пример.** Найти наклонные асимптоты графика функции $y=\frac{1}{x}+x+e^{-x}$.

**Решение.** Пусть $x\to+\infty$,

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}+x+e^{-x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^2}+1+\frac{1}{e^x\cdot x}\right)=1,$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}+x+e^{-x}-x\right)=0.$$

Итак, при $x\to+\infty$ уравнение асимптоты $y=x$.

$x\to-\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x^2}+1+\frac{1}{e^x\cdot x}\right)=1+\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^{-x}}{x}=1+\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-e^{-x}}{-1}=+\infty$. Следовательно, при $x\to-\infty$ наклонной асимптоты нет.

### *9.4.5. Полное исследование функции и построение графиков*

Общее исследование функции удобно выполнять по следующей схеме.

1. Найти область определения функции.
2. Выяснить, является ли функция четной или нечетной.
3. Проверить, является ли функции периодической.
4. Найти точки пересечения графика функции с осями координат и интервалы знакопостоянства функции.
5. Исследовать функцию на непрерывность, найти точки разрыва функции (если они существуют) и установить характер разрыва.
6. Найти интервалы монотонности функции и точки экстремумов.
7. Найти точки перегиба графика функции и интервалы выпуклости.
8. Найти асимптоты графика функции.

**Пример.** Исследовать функцию $y=\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$ и построить ее график.

**Решение.** 1. Функция определена при всех значениях $x$ за исключением точки $x=0$.

2. Функция является нечетной, т.к. $f(-x)=\operatorname{arctg}\frac{1}{-x}=-\operatorname{arctg}\frac{1}{x}=-f(x)$.

3. Функция не является периодической.

4. Точек пересечения с осями координат график функции не имеет. При этом, если $x>0$, то $\operatorname{arctg}\frac{1}{x}>0$ и если $x<0$, то $\operatorname{arctg}\frac{1}{x}<0$.

5. Точка $x=0$ является точкой разрыва первого рода, т.к.

$$\lim_{x\to 0+0}\operatorname{arctg}\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2},\quad \lim_{x\to 0-0}\operatorname{arctg}\frac{1}{x}=-\frac{\pi}{2}.$$

6. Найдем первую производную функции: $y'=\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=-\frac{1}{1+x^2}<0$.

Экстремумов нет, функция убывает на интервалах $(-\infty;\,0)$ и $(0;\,-\infty)$.

7. Вторая производная $y''=\frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}$. Если $x>0$, то $y''>0$, график выпуклый вниз; если $x<0$, то $y''<0$, график выпуклый вверх. Точек перегиба нет, т.к. точка $x=0$ не принадлежит области определения.

8. Вертикальных асимптот нет, т.к. $\lim\limits_{x\to 0+0}f(x)=\frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to 0-0}f(x)=-\frac{\pi}{2}$.

Найдем наклонную асимптоту $k=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\operatorname{arctg}\frac{1}{x}}{x}=0$, $b=\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{arctg}\frac{1}{x}=0$.

Следовательно, $y=0$ – горизонтальная асимптота при $x\to+\infty$.

Т.к. функция является нечетной, то прямая $y=0$ также будет горизонтальной асимптотой и при $x\to-\infty$. График исследуемой функции изображен на рис. 74.

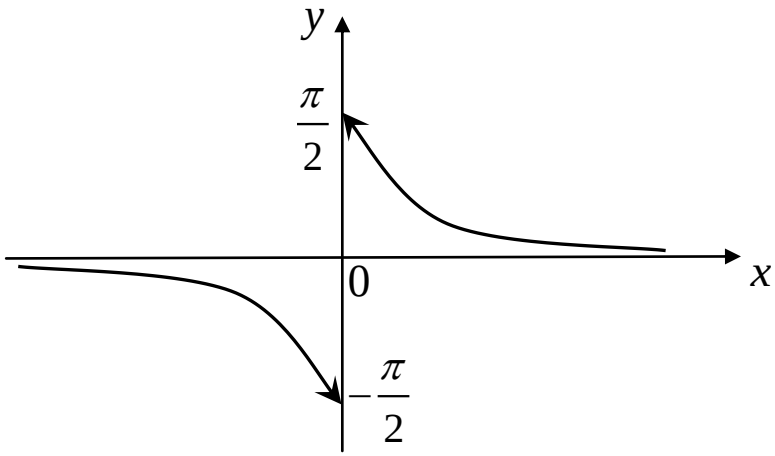



Рис. 74

**Пример.** Исследовать функцию $y=\dfrac{x^3}{(x-4)^2}$ и построить ее график.

**Решение.** 1. Функция определена при всех значениях $x$ за исключением точки $x=4$.

2. Функция не является ни четной, ни нечетной (функция общего вида), т.к. $f(-x)=\dfrac{(-x)^3}{(-x-4)^2}=-\dfrac{x^3}{(x+4)^2}$, $f(-x)\neq f(x)$ и $f(-x)\neq -f(x)$.

3. Функция не является периодической.

4. Точка пересечения графика функции с осями координат – точка $(0;0)$. При этом, если $x>0$, то $y=\dfrac{x^3}{(x-4)^2}>0$ и если $x<0$, то $y=\dfrac{x^3}{(x-4)^2}<0$.

5. Точка $x=4$ является точкой разрыва второго рода, т.к.

$$\lim_{x\to 4+0}\frac{x^3}{(x-4)^2}=\lim_{x\to 4-0}\frac{x^3}{(x-4)^2}=+\infty .$$

6. Найдем первую производную функции: $y'=\left(\dfrac{x^3}{(x-4)^2}\right)'=$

$$=\frac{\left(x^3\right)'(x-4)^2-x^3\left((x-4)^2\right)'}{\left((x-4)^2\right)^2}=\frac{3x^2(x-4)^2-x^3\cdot 2(x-4)}{(x-4)^4}=\frac{x^2(x-12)}{(x-4)^3}.$$

Найдем критические точки функции: $y'=\dfrac{x^2(x-12)}{(x-4)^3}=0$ при $x=0$ и $x=12$; $y'$ не существует при $x=4$.

Последовательно исследуем каждую критическую точку. Результаты заносим в таблицу (табл. 5):

Таблица 5

| $x$ | $(-\infty;0)$ | 0 | $(0;4)$ | 4 | $(4;12)$ | 12 | $(12;+\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | + | 0 | + | не существует | – | 0 | + |
| $y$ | $\nearrow$ | экстремума нет, $y(0)=0$ | $\nearrow$ | не существует | $\searrow$ | минимум $y(12)=27$ | $\nearrow$ |

7. Вторая производная $y''=\left(\dfrac{x^2(x-12)}{(x-4)^3}\right)'=$

$$=\frac{\left(x^2(x-12)\right)'(x-4)^3-x^2(x-12)\left((x-4)^3\right)'}{\left((x-4)^3\right)^2}=\frac{96x}{(x-4)^2}.$$

$y''=\dfrac{96x}{(x-4)^2}=0$ при $x=0$; $y'$ не существует при $x=4$.

Исследуем знак второй производной и результат занесем в таблицу (табл. 6).

Таблица 6

| $x$ | $(-\infty;0)$ | 0 | $(0;4)$ | 4 | $(4;+\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y''$ | – | 0 | + | не существует | + |
| $y$ | график выпуклый вверх | точка перегиба, $y(0)=0$ | график выпуклый вниз | не существует | график выпуклый вниз |

8. Вертикальной асимптотой является прямая $x=4$, т.к. $\lim\limits_{x\to 4+0}\dfrac{x^3}{(x-4)^2}=\lim\limits_{x\to 4-0}\dfrac{x^3}{(x-4)^2}=+\infty$.

Найдем наклонную асимптоту $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{x(x-4)^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{(x-4)^2}=1$,

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{(x-4)^2}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-x(x-4)^2}{(x-4)^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{8x^2-16x}{x^2-8x+16}=8.$$

Следовательно, прямая $y=x+8$ является наклонной асимптотой при $x\to+\infty$ и $x\to-\infty$.

График исследуемой функции изображен на рис. 75.

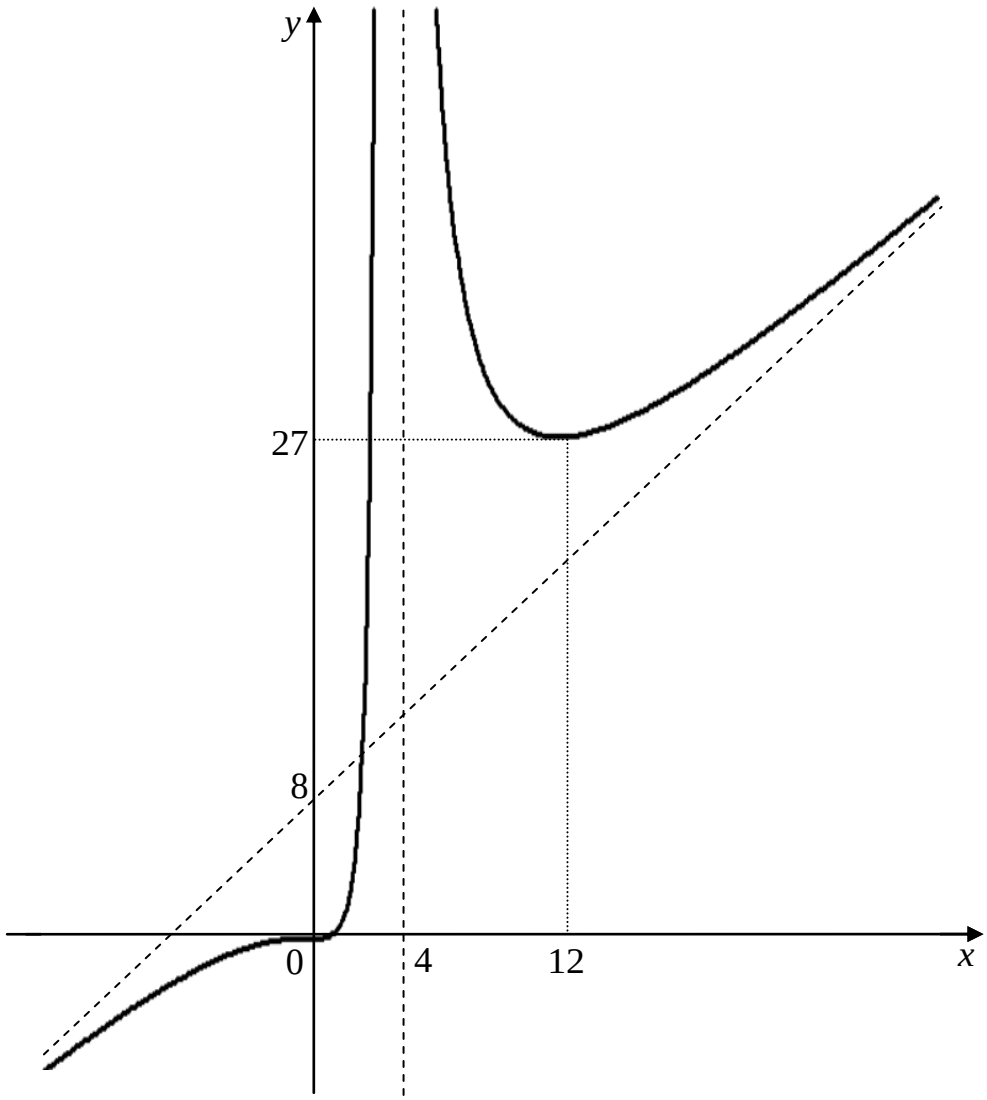


Рис. 75

### 9.5. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то она достигает своего наибольшего и наименьшего значений на этом отрезке. Если наибольшее (или наименьшее) значение функции достигается внутри отрезка, то это значение является одним из максимумом (минимумов) функции. Однако может случиться так, что наибольшее (наименьшее) значение будет достигаться на одном из концов отрезка.

Алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего на отрезке $[a; b]$ значений непрерывной функции $f(x)$.

1. Найти критические точки функции.
2. Выбрать из них те, которые принадлежат отрезку $[a; b]$.
3. Вычислить значение функции в точках, отобранных в п. 2.

4. Вычислить значения функции на концах отрезка: $f(a)$ и $f(b)$.

5. Из всех полученных в пунктах 3 и 4 значений функции выбрать наибольшее и наименьшее.

**Пример.** Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^3 - 3x$ на отрезке $[0; 3]$.

**Решение.**

1. Находим критические точки: $y' = 3x^2 - 3 = 0$, $x_1 = -1, x_2 = 1$.

2. Точка $x_1 = -1$ не принадлежит отрезку $[0; 3]$.

3. Вычисляем значение функции в критической точке $f(1) = -2$.

4. Вычисляем значения функции на концах $f(0) = 0$, $f(3) = 18$.

5. Наибольшее значение функции $y_{наиб} = 18$ достигается при $x = 3$, наименьшее значение функции $y_{наим} = -2$ достигается при $x = 1$.

*Контрольные вопросы*

1. Дайте определения максимума и минимума функции.
2. Сформулируйте теорему Ферма.
3. В чем заключается геометрический смысл теоремы Ферма?
4. Сформулируйте теорему Ролля.
5. В чем заключается геометрический смысл теоремы Ролля?
6. Сформулируйте теорему Лагранжа.
7. В чем заключается геометрический смысл теоремы Лагранжа?
8. Сформулируйте теорему Коши.
9. Для чего используется правило Лопиталя?
10. Сформулируйте правило Лопиталя.
11. Сформулируйте необходимое условие монотонности функции.
12. Сформулируйте достаточное условие монотонности функции.
13. Сформулируйте необходимое условие экстремума функции.
14. Какие точки называются критическими точками функции?
15. Сформулируйте первое достаточное условие экстремума функции.
16. Сформулируйте второе достаточное условие экстремума функции.
17. Дайте определение выпуклой вверх (вниз) функции.
18. Сформулируйте достаточное условие выпуклости вверх (вниз).
19. Какие точки называются точками перегиба?
20. Сформулируйте необходимое условие точки перегиба.
21. Сформулируйте достаточное условие точки перегиба.
22. Какая прямая называется асимптотой графика функции?
23. Приведите формулы для нахождения асимптот.
24. Приведите план полного исследования функции.
25. Приведите план нахождения наибольшего и наименьшего значений функции.

# 10. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

## 10.1. Основные понятия

Произвольный упорядоченный набор из $n$ действительных чисел $x_1, x_2, ..., x_n$ обозначается $M(x_1, x_2, ..., x_n)$ и называется точкой $n$ -мерного арифметического пространства $R^n$, сами числа $x_1, x_2, ..., x_n$ называются координатами точки $M$. Расстояние между двумя точками $M_1(x_1, x_2, ..., x_n)$ и $M_2(x_1', x_2', ..., x_n')$ определяется следующим образом:

$$\rho(M_1, M_2) = \sqrt{(x_1 - x_1')^2 + (x_2 - x_2')^2 + ... + (x_n - x_n')^2}.$$

Если $n = 1$ пространство $R^1$ совпадает с прямой и обозначается $R$. При $n = 2$ $R^2$ – плоскость. При $n = 3$ $R^3$ – пространство.

Расстояние между точками обладает следующими свойствами:

1. Неотрицательность: $\rho(M_1, M_2) \geq 0$; $\rho(M_1, M_2) = 0 \Leftrightarrow M_1 = M_2$.
2. Симметричность: $\rho(M_1, M_2) = \rho(M_2, M_1)$.
3. Неравенство треугольника: $\rho(M_1, M_2) \leq \rho(M_1, M_3) + \rho(M_3, M_2)$.

**Определение.** Множество точек $M$ плоскости, для которых выполняется условие $\rho(M_0, M) < r$, где $r > 0$, называется окрестностью точки $M_0$.

Обозначим окрестность $O(M_0)$.

**Определения.**

1. Точка называется внутренней точкой множества $\Omega$, если некоторая окрестность этой точки полностью содержится в множестве $\Omega$.

На рис. 76 точки $M_1$ и $M_2$ являются внутренними точками множества $\Omega$, а точка $M_3$ не является.

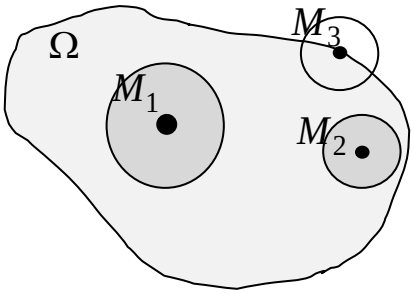


Рис. 76

2. Множество $\Omega$ называется открытым, если оно содержит только внутренние точки.

3. Точка $M \in R^n$ называется предельной точкой множества $\Omega$, если любая окрестность точки $M$ содержит по крайней мере одну точку множества $\Omega$, отличную от $M$: $O(M) \cap \Omega \neq \varnothing$.

На рис. 76 точка $M_3$ являются предельной точкой множества $\Omega$.

4. Точка $M$ называется граничной точкой множества $\Omega$, если любая окрестность этой точки содержит как точки, принадлежащие множеству $\Omega$, так и точки, не принадлежащие множеству $\Omega$.

На рис. 76 точка $M_3$ являются граничной точкой множества $\Omega$.

5. Множество всех граничных точек множества $\Omega$ называется границей множества; обозначение границы – $\partial\Omega$.

6. Множество называется замкнутым, если оно содержит все свои граничные точки.

7. Множество $\Omega$ называется ограниченным, если существует такое число $C$, что расстояние между любыми двумя точками множества $\Omega$ меньше, чем $C$:

$$\rho(M_1, M_2) < C \text{ для любых точек } M_1, M_2 \in \Omega.$$

Если такого числа нет, то множество называется неограниченным.

8. Множество $\Omega$ называется связным множеством, если любые его точки можно соединить непрерывной кривой линией в $\Omega$.

Множество $\Omega$, изображенное на рис. 76 является связным. На рис. 77 изображено несвязное множество.

9. Областью называется открытое связное множество. Замкнутая область – это область с присоединенной границей.

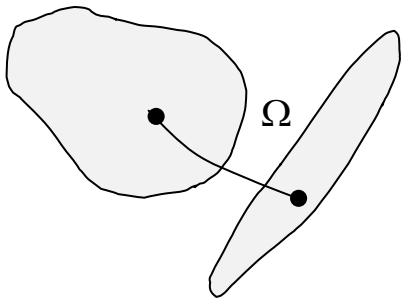


Рис. 77

Пусть $D \subseteq R^n$ – произвольное множество точек $n$ мерного арифметического пространства. Если каждой точке $M(x_1, x_2, ..., x_n) \in D$ поставлено в соответствие некоторое действительное число $f(M) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, то говорят, что на множестве $D$ задана числовая функция от $n$ переменных $x_1, x_2, ..., x_n$. Множество $D$ называется областью определения функции $z = f(M)$.

Переменные $x_1, x_2, ..., x_n$ называются независимыми переменными, $z$ – зависимой переменной, а символ $f$ означает закон соответствия.

В частном случае, при $n = 2$ функция двух переменных $z = f(x, y)$ может рассматриваться как функция точек плоскости $Oxy$ в трехмерном пространстве с заданной декартовой системой координат.

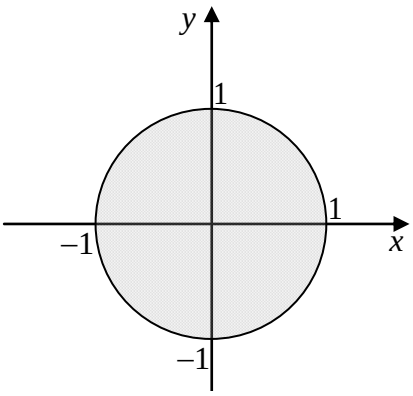


Рис. 78

Например, функция $z = \pi x_1^2 x_2$ задает объем цилиндра $z$ как функцию радиуса основания $x_1$ и высоты $x_2$.

При $n = 3$ функция трех переменных $u = f(x, y, z)$ может рассматриваться как функция точек пространства $Oxyz$ с заданной декартовой системой координат.

Далее будем рассматривать более под-

робно функции двух переменных.

**Примеры**. Найти область определения функции:

1) $z = \arccos\left(x^2 + y^2\right)$.

**Решение**. Функция определена при $x^2 + y^2 \le 1$.

Следовательно, областью определения функции является замкнутый круг единичного радиуса с центром в начале координат (рис. 78).

2) $z = \dfrac{1}{x_1 x_2}$.

Функция определена при $x_1 x_2 \ne 0$, т.е. $x_1 \ne 0$ и $x_2 \ne 0$. Эти условия задают всю плоскость, за исключением координатных осей.

Графиком функции $z = f\left(x, y\right)$ называется множество точек пространства $\Gamma = \left\{\left(x, y, z\right) \in R^3 : z = f\left(x, y\right)\right\}$, представляющее собой некоторую поверхность в $R^3$.

На рис. 79 изображен график функции $z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$ $\left(a > 0, b > 0\right)$. Это эллиптический параболоид. На рис. 80 изображен график функции $z = \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}$ $\left(a > 0, b > 0\right)$. Это гиперболический параболоид.

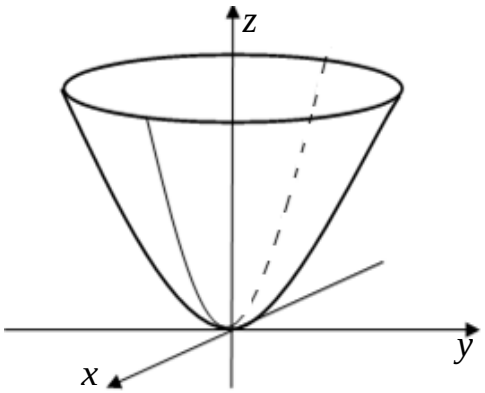



Рис. 79

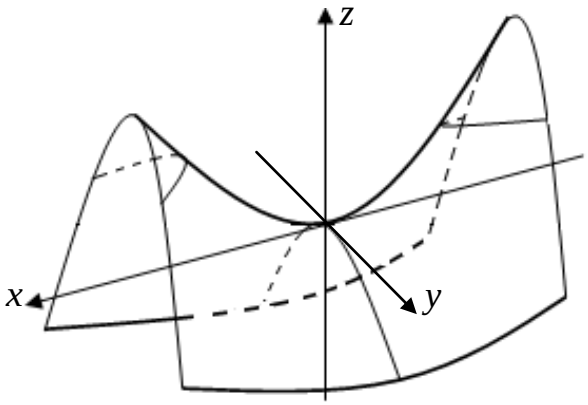



Рис. 80

## 10.2. Линии уровня

Рассмотрим сечение графика функции плоскостью $z = C$. Эта плоскость параллельна плоскости $Oxy$ и пересекает ось $z$ в точке $\left(0; 0; C\right)$.

Спроектируем линию пересечения этой плоскости с поверхностью $z = f\left(x, y\right)$ на плоскость $Oxy$. Получим так называемую линию уровня функции $z = f\left(x, y\right)$.

Линия уровня представляет собой множество всех точек на плоскости $Oxy$, для которых выполняется равенство $f(x, y) = C$. Придавая различные значения параметру $C$, можно получить множество линий уровня функции.

На рис. 81 поверхность рассечена тремя горизонтальными плоскостями: $z = a$, $z = b$ и $z = c$. Сечение первой плоскостью – это точка, второй – две отдельные замкнутые линии, третьей – одна замкнутая линия. Все эти сечения спроектированы на плоскость $Oxy$.

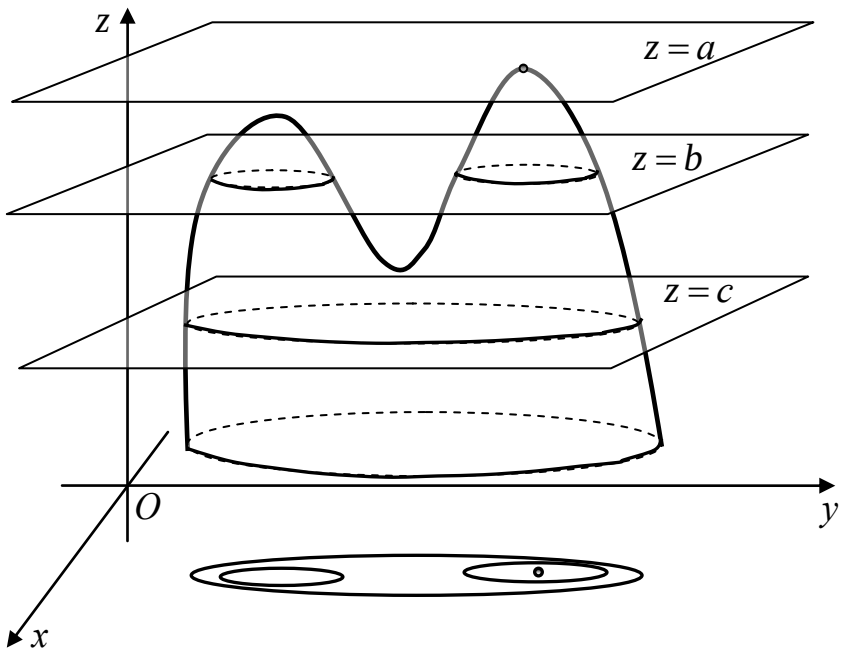



Рис. 81

**Пример.** Построить линии уровня функции $z = x^2 + y^2 - 2y$.

**Решение.** Линия уровня $z = C$ – это кривая на плоскости $Oxy$, заданная уравнениями $x^2 + y^2 - 2y = C$ или $x^2 + (y-1)^2 = C + 1$ (рис. 82).

При $C < -1$ этому уравнению не удовлетворяет ни одна точка на плоскости.

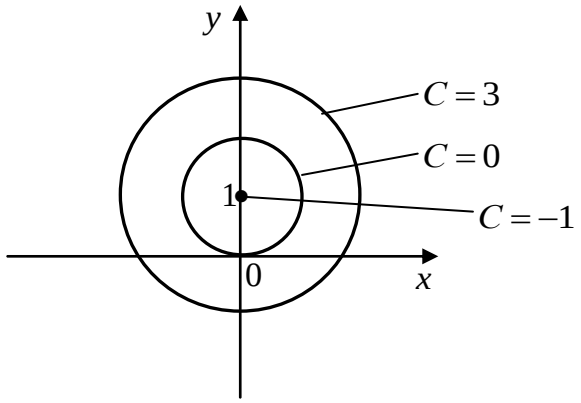



Рис. 82

При $C=-1$ уравнение задает одну точку $(0,1)$.

При $C>-1$ уравнение задает окружность с центром в точке $(0,1)$ радиуса $\sqrt{C+1}$.

### 10.3. Предел функции двух переменных

Пусть точка $M_0(x_0, y_0)$ является предельной точкой множества $\Omega$, содержащегося в области определения функции $z=f(x,y)$.

**Определение.** Число $a$ называется пределом функции $z=f(x,y)$ в точке $M_0$ (или, то же самое, при $M$, стремящемся к $M_0$), если для любого $\varepsilon>0$ существует такая окрестность $O(M_0)\subset\Omega$ точки $M_0$, что для любой точки $M$ из этой окрестности, кроме, возможно, самой точки $M_0$, выполняется неравенство

$$\left|f(M)-a\right|<\varepsilon.$$

В этом случае будем писать $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(M)=a$ или $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)=a$.

Свойства арифметических операций над функциями, имеющими предел, формулируется и доказывается аналогично соответствующим свойствам для функций одной переменной.

Рассмотрим примеры вычисления таких пределов.

**Примеры.**

1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\ln\left(1-x^2-y^2\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Обозначим $r=\sqrt{x^2+y^2}$. При $x\to 0,\ y\to 0$ и $r=\sqrt{x^2+y^2}\to 0$.

Тогда $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\ln\left(1-x^2-y^2\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim\limits_{r\to 0}\dfrac{\ln\left(1-r^2\right)}{r}=\lim\limits_{r\to 0}\dfrac{\frac{-2r}{1-r^2}}{1}=0$. Последний предел вычислен с применением правила Лопиталя.

2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$. Будем приближаться к точке $(0,0)$ по прямым $y=kx$.

Тогда $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2kx^2}{x^2+k^2x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2k}{1+k^2}=\dfrac{2k}{1+k^2}$.

Т.к. предел зависит от углового коэффициента прямой $k$, значит, при произвольном приближении к точке $(0,0)$ предел не существует.

## 10.4. Непрерывность функции двух переменных

**Определение.** Функция $z = f(x, y)$ называется непрерывной в точке $(x_0, y_0)$, если

1) она определена в этой точке и в некоторой ее окрестности;

2) существует предел функции при $x \to x_0, y \to y_0$;

3) этот предел равен значению функции в точке, т.е.

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0).$$

Геометрически это означает, что график функции вблизи точки $(x_0, y_0)$ представляет собой сплошную поверхность.

## 10.5. Частные производные

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$. Дадим аргументу $x$ приращение $\Delta x$, а аргументу $y$ – приращение $\Delta y$, тогда в новой точке функция $z = f(x, y)$ примет значение $f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ Величина

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

называется полным приращением функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$.

Если дать приращение только аргументу $x$ или только аргументу $y$, то полученные приращения функции соответственно

$$\Delta_x z = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0), \ \Delta_y z = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

называются частными приращениями.

**Определение.** Частной производной функции $z = f(x, y)$ по переменной $x$ называется предел отношения частного приращения функции $\Delta_x z$ к приращению переменной $x$ при стремлении последнего к нулю (если этот предел существует):

$$z'_x(M_0) = \frac{\partial z}{\partial x}(M_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}.$$

**Определение.** Частной производной функции $z = f(x, y)$ по переменной $y$ называется предел отношения частного приращения функции $\Delta_y z$ к приращению переменной $y$ при стремлении последнего к нулю (если этот предел существует):

$$z'_y(M_0) = \frac{\partial z}{\partial y}(M_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y}.$$

Вообще, частной производной функции нескольких переменных по одной из этих переменных называется предел отношения соответствующего

частного приращения функции к приращению рассматриваемой независимой переменной при стремлении последнего к нулю (если этот предел существует).

Если каждой точке $M(x, y)$, в которой существует частная производная функции $z = f(x, y)$, поставить в соответствие значение этой производной, то получим две новые функции двух переменных.

Обозначение этих функций – частных производных в произвольной точке – $z'_x = \dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $z'_y = \dfrac{\partial z}{\partial y}$.

**Замечание.** Частная производная функции двух переменных по какой-либо переменной вычисляется как обычная производная функции этой одной переменной при фиксированном значении другой переменной.

Вычисляя, например, производную функции $z = f(x, y)$ по переменной $x$, переменную $y$ считают постоянной и наоборот.

Правила вычисления частных производных совпадают с правилами вычисления производных функций одной переменной.

**Примеры.**

1) $z = x^2 - 2xy + y^3$, $z'_x = 2x - 2y$, $z'_y = -2x + 3y^2$.

2) $z = \ln x \cdot \sin y$, $z'_x = \dfrac{\sin y}{x}$, $z'_y = \ln x \cdot \cos y$.

3) $z = x^{2y}$, $z'_x = 2y \cdot x^{2y-1}$, $z'_y = 2x^{2y} \ln x$.

4) $z = \arccos \dfrac{x}{y}$.

$$z'_x = -\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{y}\right)^2}} \frac{1}{y} = -\frac{1}{\sqrt{y^2 - x^2}}, \quad z'_y = -\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{y}\right)^2}} \left(-\frac{x}{y^2}\right) = \frac{x}{y\sqrt{y^2 - x^2}}.$$

5) $z = \ln y - \dfrac{y}{x^2}$, $z'_x = \dfrac{2y}{x^3}$, $z'_y = \dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{x^2}$.

## 10.6. Частные производные высших порядков

Пусть $z = f(x, y)$ есть функция двух переменных $x$ и $y$.

**Определение.** Частными производными второго порядка функции $f(x, y)$ называются частные производные от ее частных производных первого порядка, если они существуют.

Частные производные второго порядка обозначаются следующим образом:

$$z''_{xx}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\ z''_{xy}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\ z''_{yx}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x},\ z''_{yy}=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Вычисляются они как частные производные от частных производных первого порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial x},\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial x},\ \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial y},\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial y}.$$

Аналогично определяются и обозначаются частные производные более высоких порядков.

**Пример**. Найти $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}$ от функции $z=e^x\left(\cos y+x\sin y\right)$.

**Решение.** Имеем

$$\frac{\partial z}{\partial x}=e^x\left(\cos y+\sin y+x\sin y\right),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial y}=e^x\left(\cos y-\sin y+x\cos y\right),$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y\partial x}=\frac{\partial\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\right)}{\partial x}=e^x\left(2\cos y-\sin y+x\cos y\right).$$

Частная производная второго или более высокого порядка, взятая по нескольким различным переменным, называется смешанной частной производной. Относительно смешанных частных производных имеет место следующая теорема.

**Теорема.** *Две смешанные частные производные от одной и той же функции в точке $M_0$, отличающиеся лишь порядком дифференцирования, равны между собой при условии их непрерывности в данной точке*.

Так, например, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$, $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}=\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y\partial x}$ и т.д.

**Пример.** Проверить равенство $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ для функции $z=\frac{x}{x+y}$.

**Решение**. Найдем частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1\cdot\left(x+y\right)-x\cdot 1}{\left(x+y\right)^2}=\frac{y}{\left(x+y\right)^2},\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x}{\left(x+y\right)^2}.$$

Найдем частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \left( \frac{y}{(x+y)^2} \right)'_y = \frac{1 \cdot (x+y)^2 - y \cdot 2(x+y)}{(x+y)^4} = \frac{x-y}{(x+y)^3},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left( -\frac{x}{(x+y)^2} \right)'_x = -\frac{1 \cdot (x+y)^2 - x \cdot 2(x+y)}{(x+y)^4} = -\frac{y-x}{(x+y)^3}.$$

Таким образом, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

## 10.7. Дифференцируемость и дифференциал

Пусть дана функция двух переменных $z = f(x, y)$. Предположим, что ее аргументы $x$ и $y$ получают соответственно приращения $\Delta x$ и $\Delta y$ Тогда функция $z = f(x, y)$ получает полное приращение

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

**Определение.** Функция $z = f(x, y)$ называется дифференцируемой в точке $f(x, y)$, если ее полное приращение $\Delta z$ может быть представлено в виде

$$\Delta z = A(x, y) \cdot \Delta x + B(x, y) \cdot \Delta y + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y,$$

где $\alpha = \alpha(\Delta x, \Delta y)$ и $\beta = \beta(\Delta x, \Delta y)$ – бесконечно малые функции при $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$.

Если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в данной точке, то ее полным дифференциалом $dz$ называется главная часть полного приращения этой функции, линейная относительно $\Delta x$ и $\Delta y$, т. е.

$$dz = A(x, y)\Delta x + B(x, y)\Delta y.$$

**Теорема (необходимое условии дифференцируемости функции).** *Если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке $M_0$, то в этой точке существуют её частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, причем $\frac{\partial z}{\partial x} = A(x, y)$, $\frac{\partial z}{\partial y} = B(x, y)$ в записи полного дифференциала $dz = A(x, y)\Delta x + B(x, y)\Delta y$.*

Рассмотрим функцию $z = x$. Дифференциал этой функции $dz = dx = 1 \cdot \Delta x + 0 \cdot \Delta y = \Delta x$, т.е. $dx = \Delta x$. Аналогично можно показать, что $dy = \Delta y$. Поэтому формулу для дифференциала функции $z = f(x, y)$ можно переписать в виде

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

**Пример.** Найти дифференциал функции $z = \sin(x + 2y)$ в произвольной точке.

**Решение.** $\frac{\partial z}{\partial x} = \cos(x + 2y)$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 2\cos(x + 2y)$.

Тогда $dz = \cos(x + 2y)dx + 2\cos(x + 2y)dy = \cos(x + 2y)(dx + 2dy)$.

Приведем без доказательства две теоремы: достаточное условие дифференцируемости и о связи непрерывности и дифференцируемости.

**Теорема (достаточное условие дифференцируемости функции)**. *Если частные производные* $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ *существуют в окрестности точки* $M_0(x_0, y_0)$ *и непрерывны в самой точке* $M_0(x_0, y_0)$, *то функция* $z = f(x, y)$ *дифференцируема в этой точке.*

**Теорема (связь непрерывности и дифференцируемости).** *Если функция* $z = f(x, y)$ *дифференцируема в точке* $M_0$, *то она непрерывна в этой точке.*

## 10.8. Дифференцирование сложных функций

I. Пусть дана функция двух переменных $z = f(x, y)$, а аргументы этой функции в свою очередь являются функциями одной переменной $t$: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$. Переменные $x$ и $y$ в таком случае являются промежуточными переменными.

Тогда $z$ зависит от $t$. Имеем сложную функцию $z = F(t) = f(\varphi(t), \psi(t))$.

Можно найти производную этой функции $\frac{dz}{dt} = \frac{dF}{dt}$.

**Теорема (производная сложной функции)**. *Пусть функции* $x = \varphi(t)$ *и* $y = \psi(t)$ *дифференцируемы в точке* $t_0$ *и функция* $z = f(x, y)$ *дифференцируема в точке* $M_0(x_0, y_0)$, *где* $x_0 = \varphi(t_0)$, $y_0 = \psi(t_0)$. *Тогда сложная функция* $F(t) = f(\varphi(t), \psi(t))$ *дифференцируема в точке* $t_0$ *и её производная вычисляется по формуле*

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}.$$

**Доказательство.** Рассмотрим приращение:

$$\Delta F = F(t) - F(t_0) = f(x, y) - f(x_0, y_0) =$$

$$=\frac{\partial z}{\partial x}(M_0)\cdot\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}(M_0)\cdot\Delta y+\alpha\cdot\Delta x+\beta\cdot\Delta y,$$

где $\alpha=\alpha(\Delta x,\Delta y)$ и $\beta=\beta(\Delta x,\Delta y)$ – бесконечно малые функции при $\Delta x\to 0,\ \Delta y\to 0$.

В силу дифференцируемости функций $x=\varphi(t)$ и $y=\psi(t)$ приращения $\Delta x$ и $\Delta y$ имеют вид:

$$\Delta x=\varphi(t)-\varphi(t_0)=\varphi'(t_0)\Delta t+\alpha_1(\Delta t) \text{ и}$$
$$\Delta y=\psi(t)-\psi(t_0)=\psi'(t_0)\Delta t+\beta_1(\Delta t),$$

где $\alpha_1(\Delta t)\to 0$ и $\beta_1(\Delta t)\to 0$ при $\Delta t\to 0$.

Таким образом,

$$\Delta F=\frac{\partial z}{\partial x}(M_0)\cdot\left(\varphi'(t_0)\Delta t+\alpha_1(\Delta t)\right)+\frac{\partial z}{\partial y}(M_0)\cdot\left(\psi'(t_0)\Delta t+\beta_1(\Delta t)\right)+$$
$$+\alpha\cdot\Delta x+\beta\cdot\Delta y.$$

Т.к. функции $x=\varphi(t)$ и $y=\psi(t)$ дифференцируемы в точке $t_0$, значит, они непрерывны в этой точке, а $\Delta x\to 0$ и $\Delta y\to 0$ при $\Delta t\to 0$.

Тогда

$$\frac{dF}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta F}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\frac{\partial z}{\partial x}(M_0)\cdot\left(\varphi'(t_0)\Delta t+\alpha_1(\Delta t)\right)}{\Delta t}+$$
$$+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\frac{\partial z}{\partial y}(M_0)\cdot\left(\psi'(t_0)\Delta t+\beta_1(\Delta t)\right)}{\Delta t}+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\alpha\cdot\Delta x+\beta\cdot\Delta y}{\Delta t}=$$
$$=\frac{\partial z}{\partial x}(M_0)\varphi'(t_0)+\frac{\partial z}{\partial y}(M_0)\psi'(t_0).$$

Остальные пределы равны нулю. Все производные в правой части равенства существуют, что и означает дифференцируемость данной сложной функции $F(t)=f\left(\varphi(t),\psi(t)\right)$ в точке $t_0$.

Кроме того, справедлива формула

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}.$$

**Пример**. Найти $\frac{dz}{dt}$, если $z=x^2+y^3,\ x=\cos t,\ y=\sin t$.

**Решение**.

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}=2x\cdot(-\sin t)+3y^2\cdot\cos t=-2\cos t\sin t+3\sin^2 t\cos t=$$
$$=-\sin 2t+\frac{3}{2}\sin t\sin 2t=\frac{1}{2}\sin 2t(3\sin t-2).$$

Рассмотрим другие варианты сложных функций и приведем без доказательства формулы для вычисления их производных.

II. Пусть дана функция двух переменных $z = f(x, y)$, а переменная $y$ зависит от $x$: $y = \varphi(x)$.

Имеем сложную функцию одной переменной $z = F(x) = f(x, \varphi(x))$. Можно найти производную этой функции $\frac{dz}{dx}$ по формуле

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

**Пример**. Найти $\frac{dz}{dx}$, если $z = \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y^2$, $y = \sqrt{x} + e^x$.

**Решение**.

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{2y}{\cos^2 y^2} \cdot \left( \frac{1}{2\sqrt{x}} + e^x \right) =$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{2\left(\sqrt{x} + e^x\right)}{\cos^2\left(\sqrt{x} + e^x\right)^2} \cdot \left( \frac{1}{2\sqrt{x}} + e^x \right).$$

III. Пусть дана функция двух переменных $z = f(x, y)$, а аргументы этой функции в свою очередь являются функциями двух переменных $u$ и $v$: $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$.

Тогда $z$ зависит от $u$ и $v$. Имеем сложную функцию $z = F(u, v)$. Частные производные этой функции вычисляются по формулам:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} \text{ и } \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}.$$

**Пример**. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$, если $z = x\sqrt{y}$, $x = uv$, $y = u + v$.

**Решение**.

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} = \sqrt{y} \cdot v + \frac{x}{2\sqrt{y}} \cdot 1 = v\sqrt{u+v} + \frac{uv}{2\sqrt{u+v}} =$$

$$= v\sqrt{u+v} + \frac{uv}{2\sqrt{u+v}} = \frac{2v(u+v) + uv}{2\sqrt{u+v}} = \frac{3uv + 2v^2}{2\sqrt{u+v}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} = \sqrt{y} \cdot u + \frac{x}{2\sqrt{y}} \cdot 1 = u\sqrt{u+v} + \frac{uv}{2\sqrt{u+v}} =$$

$$= \frac{2u(u+v)+uv}{2\sqrt{u+v}} = \frac{3uv+2u^2}{2\sqrt{u+v}}.$$

## 10.9. Производная по направлению

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$, $l$ – некоторое направление, задаваемое единичным вектором $\vec{e} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ (рис. 84).

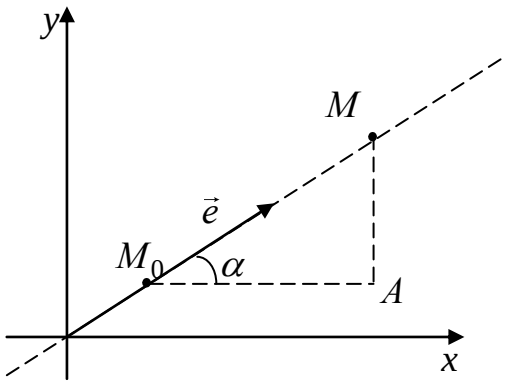



Рис. 84

Возьмем точку $M$ на прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ параллельно вектору $\vec{e}$. При перемещении точки $M_0(x_0, y_0)$ в точку $M(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ функция получит приращение

$$\Delta_l z = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0),$$

которое называется приращением функции в направлении $l$.

Обозначим через $s$ ориентированную длину отрезка $M_0M$, т.е. длину, взятую со знаком плюс, если векторы $\vec{e}$ и $\overrightarrow{M_0M}$ направлены в одну сторону, и со знаком минус – если в противоположные.

**Определение.** Производной функции $z = f(x, y)$ по направлению $l$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ называется предел отношения приращения функции в этом направлении к ориентированной длине отрезка $M_0M$, если точка $M$ перемещается по прямой к точке $M_0$, если этот предел существует:

$$\frac{\partial z}{\partial l}(M_0) = \lim_{M \to M_0} \frac{\Delta_l z}{s}.$$

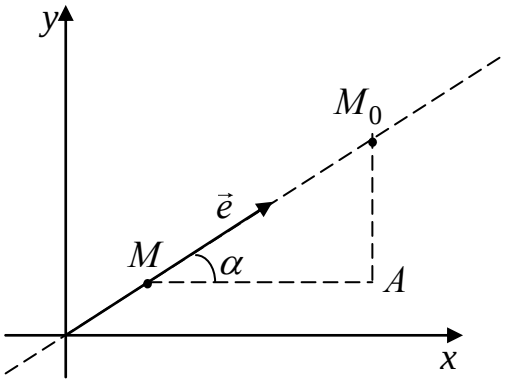



Рис. 85

Производная по направлению характеризует скорость изменения функции в данном направлении.

Из треугольника $M_0MA$ на рис. 84:

$$\Delta x = x - x_0 = M_0A = M_0M\cos\alpha,$$
$$\Delta y = y - y_0 = MA = M_0M\sin\alpha.$$

Если расположение точек такое, как на рис. 85, то эти формулы принимают вид:

$$\Delta x = x - x_0 = -MA = -M_0M\cos\alpha,$$
$$\Delta y = y - y_0 = -M_0A = -M_0M\sin\alpha.$$

Таким образом,

$$\Delta x = s\cdot\cos\alpha,\ \Delta y = s\cdot\sin\alpha.$$

Значит,

$$x = x_0 + s\cdot\cos\alpha,\ y = y_0 + s\cdot\sin\alpha.$$

Примем в качестве переменной значение $s$, соответствующее точке $M$. Точке $M_0$ соответствует $s=0$, значит, приращение переменной $s$ в точке $M$ равно $\Delta s = s$. При этом $x=\varphi(s)=x_0+s\cdot\cos\alpha$, $y=\psi(s)=y_0+s\cdot\sin\alpha$.

Рассмотрим сложную функцию

$$F(s)=f\left(x_0+s\cdot\cos\alpha,\ x_0+s\cdot\sin\alpha\right)=f\left(\varphi(s),\psi(s)\right).$$

Тогда $\dfrac{\partial z}{\partial l}(M_0)=\lim\limits_{M\to M_0}\dfrac{\Delta_l z}{s}=\lim\limits_{\Delta s\to 0}\dfrac{f\left(\varphi(s),\psi(s)\right)-f\left(\varphi(0),\psi(0)\right)}{\Delta s}=$

$$=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{F(s)-F(0)}{\Delta s}=\frac{dF}{ds}=\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{dx}{ds}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{dy}{ds}.$$

Кроме того, $\dfrac{dx}{ds}=\cos\alpha,\ \dfrac{dy}{ds}=\sin\alpha$.

Таким образом, $\dfrac{\partial z}{\partial l}(M_0)=\dfrac{\partial z}{\partial x}(M_0)\cdot\cos\alpha+\dfrac{\partial z}{\partial y}(M_0)\cdot\sin\alpha$.

**Пример**. Найти производную функции $z=xy+2x^3$ в точке $M_0(1;2)$ по направлению вектора $\vec{l}=\{1;-1\}$.

**Решение.** $\dfrac{\partial z}{\partial x}=y+6x^2,\ \dfrac{\partial z}{\partial x}(1;2)=8,\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=x,\ \dfrac{\partial z}{\partial y}(1;2)=1.$

$$\left|\vec{l}\right|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2},\ \cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}};\cos\beta=-\frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$\frac{\partial z}{\partial l}(1;2)=8\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+1\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{7}{\sqrt{2}}.$$

## 10.10. Градиент

Пусть функция $z=f(x,y)$ дифференцируема в точке $M(x,y)$.

**Определение.** Градиентом функции $z=f(x,y)$ в точке $M$ называется вектор, составленный из частных производных функции, вычисленных в этой точке:

$$\operatorname{grad} z(M)=\left\{\frac{\partial z}{\partial x}(M);\frac{\partial z}{\partial y}(M)\right\}.$$

**Пример.** Определить градиент функции $z=\dfrac{x^3}{2}+\dfrac{y^2}{3}$ в точке $A(1;2)$.

**Решение.** В произвольной точке $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{3x^2}{2},\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{2y}{3},\ \operatorname{grad} z=\left\{\dfrac{3x^2}{2};\dfrac{2y}{3}\right\}.$

В точке $A(1;2)$: $\operatorname{grad} z(1;2)=\left\{\frac{3}{2}\cdot 1^2;\frac{2\cdot 2}{3}\right\}=\left\{\frac{3}{2};\frac{4}{3}\right\}$.

Правую часть формулы для вычисления производной по направлению $\frac{\partial z}{\partial l}(M)=\frac{\partial z}{\partial x}(M)\cos\alpha+\frac{\partial z}{\partial y}(M)\sin\alpha$ можно представить как скалярное произведение вектора $\operatorname{grad} z(M)$ и единичного вектора $\vec{e}$, направленного как ось $l$: $\frac{\partial z}{\partial l}(M)=\operatorname{grad} z(M)\cdot\vec{e}=\left|\operatorname{grad} z(M)\right|\left|\vec{e}\right|\cos\varphi=\left|\operatorname{grad} z(M)\right|\cos\varphi$, где $\varphi$ – угол между градиентом и вектором $\vec{e}$.

Получаем формулу

$$\frac{\partial z}{\partial l}(M)=\left|\operatorname{grad} z(M)\right|\cos\varphi.$$

Если угол $\varphi=0°$, то $\cos\varphi=1$, т.е. принимает свое наибольшее значение. При этом векторы $\operatorname{grad} z(M)$ и $\vec{e}$ сонаправлены. Значит, производная по направлению от функции $z=f(x,\,y)$ в точке $M$ достигает наибольшего значения, если это направление совпадает с направлением градиента функции в рассматриваемой точке. Иначе можно сказать, что градиент функции в точке направлен в сторону наискорейшего возрастания функции в этой точке.

Кроме того, из этой формулы следует, что наибольшее значение производной по направлению в точке (или наибольшее значение скорости возрастания функции в точке) равно величине градиента функции в этой точке.

Если же угол $\varphi=180°$, то $\cos\varphi=-1$, т.е. принимает свое наименьшее значение. При этом векторы $\operatorname{grad} z(M)$ и $\vec{e}$ противоположно направлены. Значит, производная по направлению от функции $z=f(x,\,y)$ в точке $M$ достигает наименьшего значения, если это направление противоположно направлению градиента.

**Пример**. Найти производную функции $z=\frac{y}{y-x}$ по направлению, составляющему угол в $60^\circ$ с осью $Ox$, в точке $(1;\,3)$.

**Решение.** Найдем частные производные функции:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y}{(y-x)^2};\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x}{(y-x)^2}.$$

Теперь можно определить градиент функции в точке $(1;\,3)$:

$$\operatorname{grad} z(1;3)=\left\{\frac{3}{4};-\frac{1}{4}\right\}.$$

Вектор $\vec{e}=\left\{\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$, т.к. $\cos\alpha=\cos 60^{\circ}=\frac{1}{2};\cos\beta=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Тогда $\frac{\partial z}{\partial l}(1;3)=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3-\sqrt{3}}{8}$.

## 10.11. Экстремум функции двух переменных

**Определение.** Функция $z=f(x,y)$ имеет максимум в точке $M_0(x_0,y_0)$, если $f(x_0,y_0)>f(x,y)$ для всех точек $(x,y)$, достаточно близких к точке $(x_0,y_0)$ и отличных от неё.

Коротко: $M_0$ – точка максимума $\Leftrightarrow$ $\exists\, O(M_0)\subset D(f)$: $\forall M\in O(M_0),\, M\neq M_0,\ f(M_0)>f(M)$.

**Определение.** Функция $z=f(x,y)$ имеет минимум в точке $M_0(x_0,y_0)$, если $f(x_0,y_0)<f(x,y)$ для всех точек $(x,y)$, достаточно близких к точке $(x_0,y_0)$ и отличных от неё.

Коротко: $M_0$ – точка минимума $\Leftrightarrow$ $\exists\, O(M_0)\subset D(f)$: $\forall M\in O(M_0),\, M\neq M_0\ \ f(M_0)<f(M)$.

Максимум и минимум функции называются экстремумами функции.

**Теорема (необходимое условие экстремума функции двух переменных).** *Если функция $z=f(x,y)$, дифференцируемая в некоторой окрестности точки $M_0(x_0,y_0)$, достигает экстремума в этой точке, то каждая частная производная первого порядка от функции обращается в нуль в этой точке:*

$$\frac{\partial z}{\partial x}(M_0)=0,\ \frac{\partial z}{\partial y}(M_0)=0.$$

**Доказательство.** Зафиксируем одну из переменных. Положим, например, $y=y_0$. Тогда получим функцию $f(x,\,y_0)=\varphi(x)$ одной переменной, которая имеет экстремум при $x=x_0$. Следовательно, согласно необходимому условию экстремума функции одной переменной, $\varphi'(x_0)=0$, т.е. $\frac{\partial z}{\partial x}(M_0)=0$.

Аналогично можно показать, что $\frac{\partial z}{\partial y}(M_0)=0$.

**Определение.** Точка, в которой частные производные первого порядка функции равны нулю, называется стационарной точкой функции.

Функция может иметь экстремум и в точках, в которых частные производные не существуют. Стационарная точка, в которой хотя бы одна из производных не существует, называется критической точкой функции.

Например, функция $z=\sqrt{x^2+y^2}$ имеет максимум в точке $O(0,0)$, но не имеет в этой точке частных производных.

Приведем без доказательства достаточное условие экстремума.

**Теорема (достаточное условие экстремума функции двух переменных).** *Пусть в некоторой области, содержащей точку* $M_0(x_0,y_0)$ *функция* $z=f(x,y)$ *имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно. Пусть, кроме того, точка* $M_0(x_0,y_0)$ *является стационарной точкой функции* $z=f(x,y)$, *т.е.* $z'_x(M_0)=0,\ z'_y(M_0)=0$.

*Обозначим* $A=z''_{xx}(M_0),\ B=z''_{xy}(M_0),\ C=z''_{yy}(M_0),\ \Delta(M_0)=AC-B^2$. *Тогда:*

*1) если* $\Delta(M_0)>0$ *и* $A<0$, *то функция имеет максимум в точке* $M_0(x_0,y_0)$;

*2) если* $\Delta(M_0)>0$ *и* $A>0$, *то функция имеет минимум в точке* $M_0(x_0,y_0)$;

*3) если* $\Delta(M_0)<0$, *то функция не имеет ни минимума, ни максимума в точке* $M_0(x_0,y_0)$.

**Замечание.** Если $\Delta(M_0)=0$, то экстремум может быть, а может и не быть (требуется дополнительное исследование).

**Пример.** Исследовать на экстремум функцию $z=3x^3+y^2+4xy-x+2$.

**Решение.** 1. Найдем стационарные точки функции.

Для этого решим систему $\begin{cases} z'_x=0, \\ z'_y=0. \end{cases}$

Для данной функции $\begin{cases} z'_x=9x^2+4y-1=0, \\ z'_y=2y+4x=0. \end{cases}$

Из второго уравнения $y=-2x$. Подставим в первое уравнение: $9x^2-8x-1=0$. Корни этого уравнения $x_1=1,\ x_2=-\dfrac{1}{9}$.

Подставим найденные значения переменной $x$ в уравнение $y=-2x$: $y_1=-2,\ y_2=\dfrac{2}{9}$.

Таким образом, получили две стационарные точки $M_1(1,-2)$ и $M_2\left(-\frac{1}{9},\frac{2}{9}\right)$, в которых продолжим исследование функции на экстремум.

2. Найдем все вторые частные производные от функции:

$$z''_{xx}=18x,\ z''_{xy}=4,\ z''_{yy}=2.$$

3. Для каждой из стационарных точек установим наличие экстремума функции (для этого вычислим значения $A,\ B,\ C$ и $\Delta$).

Вторые производные в точке $M_1(1,-2)$:

$$A=z''_{xx}(M_1)=18,\ B=z''_{xy}(M_1)=4,\ C=z''_{yy}(M_1)=2;$$

$$\Delta(M_1)=AC-B^2=18\cdot 2-4^2=20>0,\ A=18>0.$$

Значит, функция в точке $M_1(1,-2)$ имеет минимум. $z_{\min}=3\cdot 1^3+(-2)^2+4\cdot 1\cdot(-2)-1+2=0$.

Вторые производные в точке $M_2\left(-\frac{1}{9},\frac{2}{9}\right)$:

$$A=z''_{xx}(M_2)=-2,\ B=z''_{xy}(M_2)=4,\ C=z''_{yy}(M_2)=2;$$

$$\Delta(M_2)=AC-B^2=(-2)\cdot 2-4^2=-20<0.$$

Значит, функция в точке $M_2\left(-\frac{1}{9},\frac{2}{9}\right)$ не имеет ни максимума, ни минимума.

**Пример.** Исследовать на экстремум функцию $z=-x^2-xy-y^2+3x+6y$.

**Решение.** 1. Найдем стационарные точки функции.

Для данной функции $\begin{cases} z'_x=-2x-y+3=0, \\ z'_y=-x-2y+6=0. \end{cases}$

Перепишем систему в виде, удобном для применения формул Крамера и применим их.

$$\begin{cases} 2x+y=3, \\ x+2y=6; \end{cases}\ \Delta=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=3,\ \Delta_x=\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix}=0,\ \Delta=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}=9,\ x=0,\ y=3.$$

Таким образом, получили одну стационарную точку $M(0,3)$.

2. Найдем все вторые частные производные: $z''_{xx}=-2,\ z''_{xy}=-1,\ z''_{yy}=-2$.

3. Вычислим значения $A,\ B,\ C$ и $\Delta$.

Вторые производные в точке

$$A=z''_{xx}(M)=-2,\ B=z''_{xy}(M)=-1,\ C=z''_{yy}(M)=-2;$$

$$\Delta(M)=AC-B^2=-2\cdot(-2)-(-1)^2=3>0,\ A=-2<0.$$

Значит, функция в точке $M(0,3)$ имеет максимум. $z_{\max} = -0^2 - 0\cdot 3 - 3^2 + 3\cdot 0 + 6\cdot 3 = 9$.

## 10.12. Метод наименьших квадратов

В различных исследованиях приходится использовать формулы, составленные на основании исследования какого-либо физического, химического, экономического процесса. Одним из способов получения таких формул является метод наименьших квадратов.

Пусть необходимо установить функциональную зависимость между двумя переменными величинами $x$ и $y$. Например, между кредитными вложениями банков и их прибылью.

По результатам изучения некоторых данных составим следующую таблицу (табл. 6).

Таблица 6

| $x$ | $x_1$ | $x_2$ | … | $x_i$ | … | $x_n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $y_1$ | $y_2$ | … | $y_i$ | … | $y_n$ |

Установим вид функции $y = f(x)$ по характеру расположения на координатной плоскости точек $(x_i, y_i)$ (рис. 86).

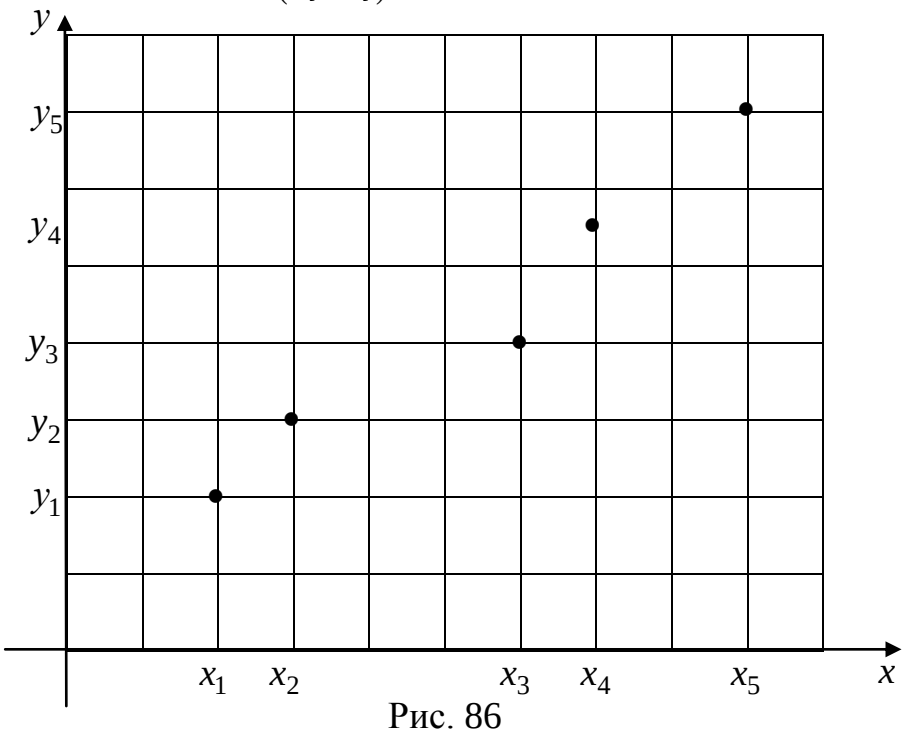



Рис. 86

Предположим, что между $x$ и $y$ существует линейная зависимость, выражающаяся формулой $y = ax + b$.

Т.к. точки $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$, …, $(x_n, y_n)$ лежат в общем случае не на прямой $y = ax + b$, а лишь вблизи нее, то в формуле $y = ax + b$ при

подстановке координат точек $(x_i,\ y_i)$ знак равенства нужно заменить знаком приближённого равенства: $y_i \approx ax_i + b$.

Обозначим разницу между левой и правой частью этого приближённого равенства через $\delta_i$, то есть $\delta_i = y_i - (ax_i + b)$ $(i = 1,\ 2,\ ...,\ n)$. Назовём эти величины погрешностями.

Поставим задачу подобрать коэффициенты $a$ и $b$ таким образом, чтобы эти погрешности были возможно меньше по абсолютной величине. Для этого составим функцию от переменных $a$ и $b$, которая выражает сумму квадратов этих погрешностей

$$S(a,\ b) = \sum_{i=1}^{n} \left[ y_i - (ax_i + b) \right]^2 .$$

Таким образом, задача свелась к нахождению значений $a$ и $b$, при которых функция $S(a,\ b)$ имеет минимум.

Найдём частные производные первого порядка этой функции по переменным $a$ и $b$:

$$\frac{\partial S}{\partial a} = -2 \sum_{i=1}^{n} \left[ y_i - (ax_i + b) \right] x_i ,$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = -2 \sum_{i=1}^{n} \left[ y_i - (ax_i + b) \right].$$

Приравнивая эти частные производные к нулю, получаем линейную систему двух уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} -2 \sum\limits_{i=1}^{n} \left[ y_i - (ax_i + b) \right] x_i = 0, \\ -2 \sum\limits_{i=1}^{n} \left[ y_i - (ax_i + b) \right] = 0. \end{cases}$$

Преобразуем эту систему к более удобному для решения виду.

$$\begin{cases} -2 \sum\limits_{i=1}^{n} \left[ y_i - (ax_i + b) \right] x_i = 0, \\ -2 \sum\limits_{i=1}^{n} \left[ y_i - (ax_i + b) \right] = 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} y_i x_i - \sum\limits_{i=1}^{n} a x_i^2 - \sum\limits_{i=1}^{n} b x_i = 0, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} y_i - \sum\limits_{i=1}^{n} a x_i - \sum\limits_{i=1}^{n} b = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + b \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i , \\ a \sum\limits_{i=1}^{n} x_i + b \cdot n = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i . \end{cases}$$

Эта система называется нормальной системой метода наименьших квадратов. Из неё находим числа $a$ и $b$, и затем, подставляя их в уравнение $y = ax + b$, получаем уравнение искомой прямой.

Тот факт, что функция $S(a, b)$ в найденной точке $M(a, b)$ имеет минимум, устанавливается с помощью частных производных второго порядка.

Имеем $\dfrac{\partial^2 S}{\partial a^2} = 2\sum_{i=1}^{n} x_i^2$, $\dfrac{\partial^2 S}{\partial a \partial b} = 2\sum_{i=1}^{n} x_i$, $\dfrac{\partial^2 S}{\partial b^2} = 2n$.

Тогда

$$\Delta = \frac{\partial^2 S}{\partial a^2} \cdot \frac{\partial^2 S}{\partial b^2} - \left(\frac{\partial^2 S}{\partial a \partial b}\right)^2 = 4n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 4\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 = 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(x_i - x_j\right)^2 > 0.$$

Кроме того $\dfrac{\partial^2 S}{\partial a^2} = 2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 > 0$. Следовательно, функция $S(a, b)$ в точке $M(a, b)$ имеет минимум.

**Пример.** Пусть в результате эксперимента получены пять значений искомой функции $y$ при пяти значениях аргумента $x$. Данные занесены в таблицу (табл. 7, столбцы 2 и 3). Значения $x$ заносятся в таблицу в порядке возрастания.

**Решение.**

Будем искать зависимость между $x$ и $y$ в виде линейной функции $y = ax + b$. Для составления нормальной системы метода наименьших квадратов заполним таблицу (табл. 7).

Таблица 7

| $n$ | $x_i$ | $y_i$ | $x_i y_i$ | $x_i^2$ |
|---|---|---|---|---|
| (1) | (2) | (3) | (4) | (5) |
| 1 | 1 | 5,5 | 5,5 | 1 |
| 2 | 3 | 6,3 | 18,9 | 9 |
| 3 | 6 | 6,7 | 40,2 | 36 |
| 4 | 18 | 9,2 | 165,6 | 324 |
| 5 | 20 | 9,6 | 192,0 | 400 |
| Сумма | 48 | 37,3 | 422,2 | 770 |

Нормальная система имеет вид $\begin{cases} 770a + 48b = 422,2, \\ 48a + 5b = 37,3. \end{cases}$

Эту систему можно решить, например, по формулам Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 770 & 48 \\ 48 & 5 \end{vmatrix} = 1546, \ \Delta_x = \begin{vmatrix} 422,2 & 48 \\ 37,3 & 5 \end{vmatrix} = 320,6, \ \Delta_y = \begin{vmatrix} 770 & 422,2 \\ 48 & 37,3 \end{vmatrix} = 8455,4.$$

Её решение $a=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{320,6}{1546}=0,21\approx 0,2$, $b=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{8455,4}{1546}=5,47\approx 5,5$. Уравнение искомой прямой $y=0,2x+5,5$.

На чертеже в системе координат изобразим все точки $(x_i,\ y_i)$ (показаны красным цветом), построим прямую $y=0,2x+5,5$ и покажем погрешности $\delta_i$ в виде вертикальных отрезков.

При этом прямую $y=0,2x+5,5$ построим по двум точкам, например, $(0;\ 5,5)$ и $(20;\ 9,5)$ (рис. 87).

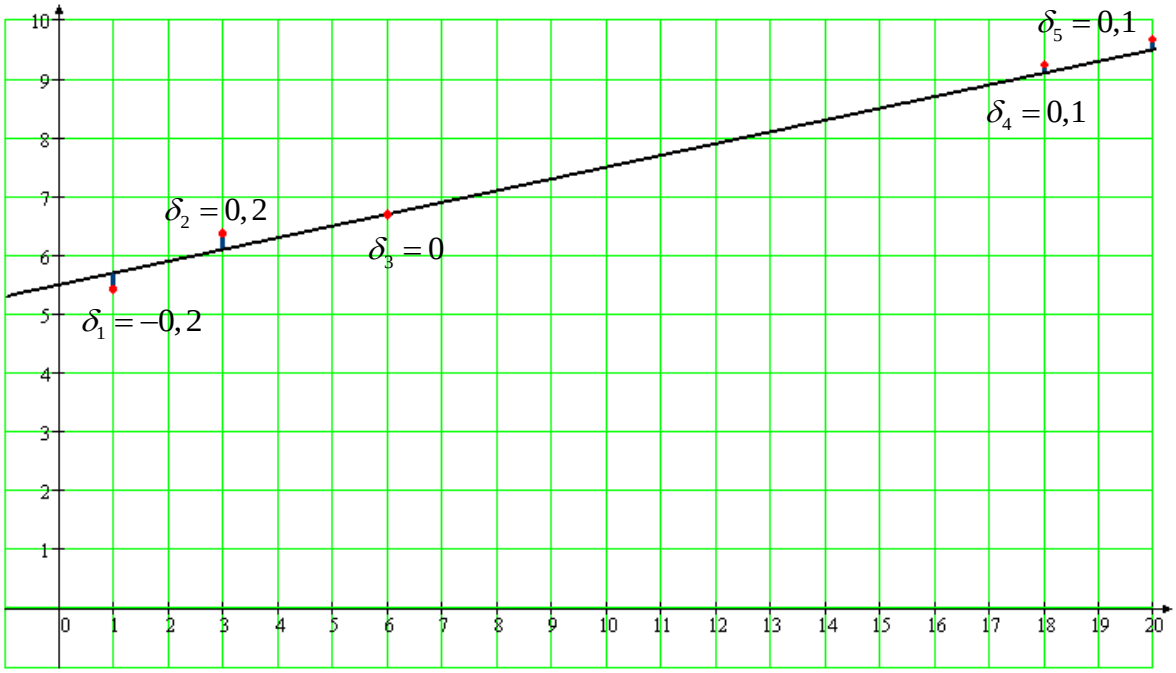



Рис. 87

## 10.13. Наибольшее и наименьшее значения функции в замкнутой области

**Теорема (Вейерштрасса)**. *Пусть в замкнутой ограниченной области $D$ задана непрерывная функция $z=f(x,y)$. Тогда в области $D$ функция $z=f(x,y)$ ограничена.*

Пусть в замкнутой ограниченной области $D$ задана непрерывная функция $z=f(x,y)$, имеющая, кроме того, непрерывные частные производные первого порядка. Тогда в области $D$ функция $z=f(x,y)$ достигает своего наибольшего $M$ и наименьшего $m$ значений. И пусть граница области $D$ является кусочно гладкой, т.е. задается одним или несколькими уравнениями непрерывных кривых.

Такая функция достигает наибольшего и наименьшего значений или в стационарной точке внутри области $D$, или в точках границы области.

Для того чтобы найти наибольшее и наименьшее значения функции в замкнутой области, следует:

1) найти стационарные точки, расположенные в данной области, и вычислить значения функции в этих точках;

2) найти наибольшее и наименьшее значения функции на линиях, образующих границу области;

3) из всех найденных значений выбрать наибольшее и наименьшее.

**Пример**. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = 4x^2 - 2xy + y^2 - 8x$ в области $D$, ограниченной прямыми $x = 0$, $y = 0$, $4x + 3y = 12$.

**Решение.** Построим область $D$ на плоскости $Oxy$ (рис. 88).

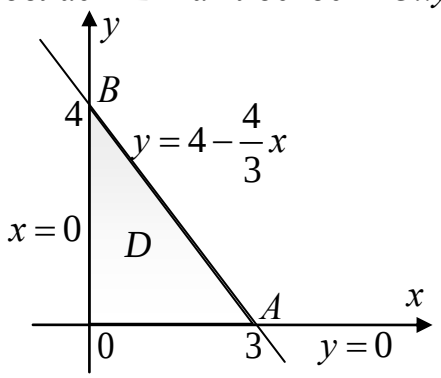



Рис. 88

1. Найдём стационарные точки внутри области $D$:

$$\begin{cases} z'_x = 8x - 2y - 8 = 0, \\ z'_y = -2x + 2y = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{4}{3}, \\ y = \dfrac{4}{3}. \end{cases}$$

Стационарная точка – $M\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right) \in D$.

Значение функции в этой точке $z(M) = 4 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^2 - 2 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{3} + \left(\frac{4}{3}\right)^2 - 8 \cdot \frac{4}{3} =$

$= \frac{64}{9} - \frac{32}{9} + \frac{16}{9} - \frac{32}{3} = -\frac{48}{9}$, $z(M) = -\frac{48}{9} \approx -5{,}33$.

2. Исследуем границу области.

Каждую часть границы, заданную своим уравнением, исследуем отдельно. Граница области $D$ состоит из трёх частей:

$$l_1: x=0,\ y\in[0,4];$$
$$l_2: y=0,\ x\in[0,3];$$
$$l_3: y=4-\frac{4}{3}x,\ x\in[0,3].$$

а) $z\big|_{l_1}=z\big|_{x=0}=f_1(y)=y^2$, $f_1'(y)=2y=0$ при $y=0\notin(0,4)$.

Найдем значение функции $f_1(y)$ на концах отрезка $[0,4]$: $f_1(0)=0,\ f_1(4)=16$. Выберем из них самое большое и самое маленькое: $f_1(0)=0,\ f_1(4)=16$.

б) $z\big|_{l_2}=z\big|_{y=0}=f_2(x)=4x^2-8x$, $f_2'(x)=8x-8=0$ при $x=1\in(0,3)$.

Найдем значение функции $f_2(x)$ в найденной критической точке и на концах отрезка $[0,3]$: $f_2(0)=0,\ f_2(3)=12,\ f_2(1)=-4$. Выберем из них самое большое и самое маленькое: $f_2(3)=12,\ f_2(1)=-4$.

в) $z\big|_{l_3}=z\big|_{y=4-\frac{4}{3}x}=f_3(x)=4x^2-2x\left(4-\frac{4}{3}x\right)+\left(4-\frac{4}{3}x\right)^2-8x=$

$=\frac{76}{9}x^2-\frac{80}{3}x+16$, $f_3'(x)=\frac{152}{9}x-\frac{80}{3}=0$ при $x=\frac{30}{19}\in(0,3)$. Найдем значение функции $f_3(x)$ в найденной критической точке и на концах отрезка $[0,3]$: $f_3(0)=16,\ f_3(3)=12,\ f_3\left(\frac{30}{19}\right)=-\frac{1824}{361}\approx-5{,}05$. Выберем из них самое большое и самое маленькое: $f_3(0)=16,\ f_3\left(\frac{30}{19}\right)=-\frac{1824}{361}$.

3. Из всех обведенных в рамку значений выберем самое большое и самое маленькое.

Ответ. $z_{\text{наиб.}}=z(0,4)=16,\ z_{\text{наим.}}=\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)=-\frac{48}{9}$.

**Пример.** Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=x^2-y^2$ в круге $x^2+y^2\le 4$.

**Решение.** 1. Найдём стационарные точки внутри области *D*:

$$\begin{cases} z'_x=2x=0, \\ z'_y=-2y=0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0, \\ y=0. \end{cases}$$

Стационарная точка $M(0,0)\in D$. Значение функции $z(M)=0$.

2. Исследуем границу области.

Граница задана уравнением $x^2+y^2=4\Rightarrow y^2=4-x^2$ при $x\in[-2,2]$.

Подставим это выражение в функцию:

$$z\big|_{x^2+y^2=4} = f(x) = x^2 - \left(4 - x^2\right) = 2x^2 - 4,$$
$$f'(x) = 4x = 0 \text{ при } x = 0 \in (-2, 2).$$

Найдем значение функции $f(x)$ в найденной критической точке и на концах отрезка $[-2, 2]$: $f(0) = -4$, $f(-2) = 4$, $f(2) = 4$. Выберем из них самое большое и самое маленькое: $f(0) = -4$, $f(-2) = f(2) = 4$.

3. Выберем самое большое и самое маленькое из всех вычисленных значений.

Ответ. $z_{\text{наиб.}} = z(\pm 2, 0) = 4$, $z_{\text{наим.}} = (0, \pm 2) = -4$.

*Контрольные вопросы*

1. Дайте определение функции $n$ переменных.
2. Как определяется расстояние между двумя точками в $n$-мерном пространстве?
3. Какими свойствами обладает расстояние между двумя точками в $n$-мерном пространстве?
4. Дайте определение окрестности точки в $n$-мерном пространстве.
5. Какая точка называется внутренней, предельной, граничной для множества?
6. Какое множество называется открытым, замкнутым, ограниченным, связным?
7. Что называется графиком функции двух переменных?
8. Что называется линией уровня функции двух переменных?
9. Дайте определение предела функции двух переменных.
10. Какая функция называется непрерывной в точке?
11. Дайте определение частных производных функции.
12. Как вычисляются частные производные?
13. Как вычисляются частные производные высших порядков?
14. При каком условии смешанные частные производные совпадают?
15. Дайте определение дифференцируемости функции в точке.
16. Дайте определение дифференциала функции и приведите формулу для его вычисления.
17. Приведите формулы для вычисления частных производных сложных функций двух переменных.
18. Дайте определение производной по направлению и приведите формулу для ее вычисления.
19. Дайте определение градиента функции и приведите формулу для его вычисления.
20. Как связаны производная по направлению и градиент функции?
21. Дайте определение максимума и минимума функции двух переменных.

22. Сформулируйте необходимое условие экстремума функции двух переменных.

23. Сформулируйте достаточное условие экстремума функции двух переменных.

24. Для чего используется метод наименьших квадратов? В чем он заключается?

25. Как найти наибольшее и наименьшее значения функции в ограниченной замкнутой области?

## ОГЛАВЛЕНИЕ

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ, ТЕРМИНОЛОГИЯ, СИМВОЛИКА
1.1. Терминология и символика ..... 1
1.2. Элементы теории множеств ..... 1
1.3. Числовые множества. Действительные числа ..... 3
2. ФУНКЦИЯ
2.1. Понятие функции, сложная функция, взаимно обратные функции.. 5
2.2. Элементы поведения функции ..... 10
2.3. Обзор основных элементарных функций ..... 12
2.4. Понятие элементарной функции ..... 19
2.5. Примеры построения графиков функций ..... 19
2.6. Преобразование графиков функций ..... 20
3. ЧИСЛОВАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ И ЕЕ ПРЕДЕЛ
3.1. Понятие числовой последовательности ..... 23
3.2. Понятие предела последовательности ..... 24
3.3. Примеры сходящихся последовательностей ..... 26
3.4. Теорема Вейерштрасса ..... 28
4. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ
4.1. Окрестность точки числовой прямой ..... 30
4.2. Определение предела функции ..... 30
4.3. Основные свойства функции, имеющей предел ..... 33
4.4. Бесконечно малые функции ..... 34
4.5. Бесконечно большие функции, их связь с бесконечно малыми ..... 36
5. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕДЕЛОВ, РАСКРЫТИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ
5.1. Раскрытие простейших неопределенностей ..... 40
5.2. Первый замечательный предел. Раскрытие тригонометрических неопределенностей ..... 44
5.3. Второй замечательный предел.
Раскрытие неопределенности $\left[1^{\infty}\right]$ ..... 46
5.4. Сравнение бесконечно малых. Использование эквивалентных бесконечно малых при вычислении пределов ..... 49
6. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ
6.1. Понятие непрерывности функции в точке ..... 54
6.2. Основные свойства непрерывных функций ..... 55
6.3. Исследование непрерывности функции. Классификация точек разрыва ..... 58
6.4. Свойства функции, непрерывной на отрезке ..... 62
7. ПРОИЗВОДНАЯ
7.1. Определение производной ..... 66
7.2. Механический и экономический смысл производной ..... 68
7.3. Геометрический смысл производной ..... 70

7.4. Уравнение касательной и нормали к кривой ..... 71
7.5. Дифференцируемость функций ..... 72
7.6. Основные правила дифференцирования ..... 74
7.7. Производная обратной функции ..... 76
7.8. Производная сложной функции ..... 77
7.9. Производные элементарных функций ..... 79
7.10. Таблица основных формул дифференцирования ..... 82
7.11. Логарифмическое дифференцирование ..... 82
7.12. Производные высших порядков ..... 83
8. ДИФФЕРЕНЦИАЛ
8.1. Определение и геометрический смысл дифференциала ..... 85
8.2. Свойства дифференциала ..... 86
8.3. Дифференциалы высших порядков ..... 87
9. ПРИЛОЖЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ
9.1. Некоторые теоремы о дифференцируемых функциях ..... 89
9.2. Правило Лопиталя ..... 93
9.3. Раскрытие других видов неопределенностей ..... 95
9.4. Исследование функций ..... 98
9.4.1. Признаки монотонности функции ..... 98
9.4.2. Экстремумы функции ..... 100
9.4.3. Выпуклость графика функции ..... 103
9.4.4. Асимптоты графика функции ..... 107
9.4.5. Полное исследование функции и построение графиков ..... 108
9.5. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке ..... 112
10. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ
10.1. Основные понятия ..... 114
10.2. Линии уровня ..... 116
10.3. Предел функции двух переменных ..... 118
10.4. Непрерывность функции двух переменных ..... 119
10.5. Частные производные ..... 119
10.6. Частные производные высших порядков ..... 120
10.7. Дифференцируемость и дифференциал ..... 122
10.8. Дифференцирование сложных функций ..... 123
10.9. Производная по направлению ..... 126
10.10. Градиент ..... 127
10.11. Экстремум функции двух переменных ..... 129
10.12. Метод наименьших квадратов ..... 132
10.13. Наибольшее и наименьшее значения функции в замкнутой области ..... 135