

Логарифмы. Простейшие логарифмические уравнения

Определение: *Логарифмом* положительного числа x по положительному и не равному единицы основанию a называется показатель степени b , в которую надо возвести число a , чтобы получить число x .

$$\log_a x = b \quad (x > 0, a > 0, a \neq 1) \Leftrightarrow a^b = x$$

Свойства логарифмов: ($a > 0, a \neq 1$)

$$x = a^{\log_a x}, x > 0 \text{ (основное логарифмическое тождество)}$$

$$\log_a a = 1$$

$$\log_a 1 = 0$$

Основные соотношения:

$$\text{Логарифм произведения: } \log_a (x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2, x_1 > 0, x_2 > 0$$

$$\text{Логарифм частного: } \log_a \left(\frac{x_1}{x_2} \right) = \log_a x_1 - \log_a x_2, x_1 > 0, x_2 > 0$$

$$\text{Логарифм степени: } \log_a x^k = k \cdot \log_a x, x > 0, k \in R$$

$$\text{Переход к новому основанию: } \log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}, x > 0, b > 0, b \neq 1$$

Дополнительные соотношения:

$$\log_{a^p} x = \frac{1}{p} \cdot \log_a x, x > 0, p \in R$$

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}, b > 0, b \neq 1$$

Для обозначения десятичных логарифмов принята специальная запись: вместо $\log_{10} x$, где x – произвольное положительное число, пишут $\lg x$.

Для обозначения логарифма $\log_e x$, где $e \approx 2,718281828\dots$ – число Эйлера, используют символ $\ln x$. $\ln x$ называют натуральным логарифмом числа x .

Логарифмирование – это преобразование, при котором логарифм выражения с переменными приводится к сумме или разности логарифмов переменных.

Вычислить:

1) $\log_2 16$

$$\log_2 16 = \log_2 2^4 = 4\log_2 2 = 4 \cdot 1 = 4.$$

2) $\log_3 \frac{1}{243}$

$$\log_3 \frac{1}{243} = \log_3 \frac{1}{3^5} = \log_3 3^{-5} = -5\log_3 3 = -5 \cdot 1 = -5.$$

3) $5^{\frac{1}{\log_6 5}}$

$$5^{\frac{1}{\log_6 5}} = 5^{\log_5 6} = 6.$$

4) $9^{\log_{81} 4}$

$$9^{\log_{81} 4} = 9^{\log_{9^2} 2^2} = 9^{\log_9 2} = 2.$$

5) $10^{1+\lg 5}$

$$10^{1+\lg 5} = 10 \cdot 10^{\lg 5} = 10 \cdot 5 = 50.$$

Найти x , если:

6) $\log_5 x = -3$

По определению логарифма : $x = 5^{-3} \Rightarrow x = \frac{1}{125}$.

Ответ: $x = \frac{1}{125}$.

7) $\log_x \frac{1}{8} = -1,5$

Преобразуем выражение: $\log_x \frac{1}{8} = \log_x 2^{-3} = -3\log_x 2$.

Т.е. $-3\log_x 2 = -\frac{3}{2} \Rightarrow \log_x 2 = \frac{1}{2}$. По определению логарифма :

$$x^{\frac{1}{2}} = 2 \Rightarrow x = 2^2 = 4.$$

Ответ: $x = 4$.

Упростить:

8) $\log_3 \log_4 \sqrt[9]{4}$

$$\log_3 \log_4 \sqrt[9]{4} = \log_3 \left(\frac{1}{9} \cdot \log_4 4 \right) = \log_3 \frac{1}{9} = \log_3 3^{-2} = -2 \cdot \log_3 3 = -2.$$

9) $\log_3 8 - 2\log_3 2 + \log_3 \frac{9}{2}$

$$\log_3 8 - 2\log_3 2 + \log_3 \frac{9}{2} = \log_3 8 - \log_3 2^2 + \log_3 \frac{9}{2} = \log_3 \frac{8 \cdot 9}{4 \cdot 2} = \log_3 3^2 = 2.$$

Найти x :

10) $\ln x = 3\ln a + \ln 6$

$$\ln x = \ln a^3 + \ln 6 \Leftrightarrow \ln x = \ln(a^3 \cdot 6) \Leftrightarrow x = 6a^3.$$

Ответ: $x = 6a^3$.

11) $\lg x = 2\lg a - 5\lg b + \frac{3}{7}\lg c$

$$\lg x = \lg a^2 - 5\lg b^5 + \lg c^{\frac{3}{7}} \Leftrightarrow \lg x = \lg \frac{a^2 \cdot c^{\frac{3}{7}}}{b^5} \Leftrightarrow x = \frac{a^2 \cdot c^{\frac{3}{7}}}{b^5}.$$

Ответ: $x = \frac{a^2 \cdot c^{\frac{3}{7}}}{b^5}$.

Вычислить:

1. $\log_3 \frac{1}{81}$;

2. $\log_{17} 1$;

3. $\log_{\frac{1}{3}} 9$;

4. $\log_{0,2} 0,04$;

5. $\log_{\sqrt{5}} 1$;

6. $\log_5 \frac{1}{125}$;

7. $\log_{\frac{1}{4}} 8$;

8. $\lg 1000$;

9. $3^{\log_3 73}$;

10. $16 \cdot 0,5^{\log_{0,5} 4}$;

11. $25^{\log_5 3}$;

12. $0,04^{\log_{0,2} 7}$;

13. $4^{2\log_4 10}$;

14. $\left(\frac{1}{7}\right)^{1+2\log_1 3}$;

15. $16^{0,5\log_4 10+1}$;

16. $\log_4 2 + \log_4 8$;

17. $\log_2 5 + \log_2 \frac{8}{5}$;

18. $\log_3 2 - \log_3 54$;

19. $\log_3 8 + 3\log_3 \frac{9}{2}$;

20. $\log_7 196 - 2\log_7 2$;

21. $3\log_2 \log_4 16 + \log_{0,5} 2$;

22. $16^{\log_4 3 - 0,25\log_2 3}$;

23. $10^{2-\lg 2} - 25^{\log_5 7}$;

24. $9^{3-\log_3 2 - \log_{81} 4}$;

Найти x , если:

25. $\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{8} = x$;

26. $\log_{3\sqrt{3}} \frac{1}{27} = x$;

27. $\log_2 \frac{1}{8} = x$;

28. $\log_{\frac{1}{27}} 3 = x$;

29. $\ln \frac{1}{\sqrt{e}} = x$;

30. $\ln e^3 = x$;

31. $\log_5 \frac{1}{125} = x$;

32. $\log_{\frac{1}{2}} 2\sqrt{2} = x$;

$$33. \log_{49} 7 = x;$$

$$34. \log_9 243 = x;$$

$$35. \log_4 \frac{1}{128} = x;$$

$$36. \log_{\sqrt{7}} \frac{1}{7} = x;$$

$$37. \log_5 \frac{1}{5\sqrt{5}} = x;$$

$$38. \log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{64} = x;$$

$$39. \log_x 0,125 = -3;$$

$$40. \log_x 4 = -\frac{1}{2};$$

$$41. \log_x 5 = 3;$$

$$42. \log_{16} x = \frac{3}{4};$$

$$43. \log_{\frac{1}{16}} \frac{x}{2} = -0,5;$$

$$44. \ln x = 3;$$

$$45. \ln x = -\frac{3}{2};$$

$$46. \lg \frac{x}{5} = 2;$$

$$47. \ln \frac{x}{125} = 0;$$

$$48. \ln(4x) = -5;$$

$$49. \log_{\frac{1}{2}} x = -2;$$

$$50. \log_{\frac{1}{8}} x = -\frac{1}{3};$$

$$51. \log_9 x = -\frac{1}{2};$$

$$52. \log_{32} x = \frac{1}{5};$$

$$53. \log_2 x = \log_4 9;$$

$$54. \log_3 x = \log_{\frac{1}{3}} 5;$$

$$55. \log_{25} x = \log_{\frac{1}{25}} 125;$$

$$56. \lg x = 2 \lg 3;$$

$$57. \lg x = \lg 6 + \lg 2;$$

$$58. \log_{\frac{1}{4}} x = \log_2 \frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$59. \lg x = \lg 25 - \lg 5;$$

Найти:

$$60. \log_3 6, \text{ если } \log_3 2 = a;$$

$$61. \log_{12} 4 + \log_{12} 3;$$

$$62. \lg 13 - \lg 130;$$

$$63. \log_2 \sqrt[3]{0,75}, \text{ если } \log_2 3 = a;$$

Упростить:

64. $2\log_7 32 - \log_7 256 - 2\log_7 14;$

65. $\log_4 5 + \log_4 25 + \log_4 \frac{2}{125};$

66. $\log_3 72 - \log_3 \frac{16}{27} + \log_3 18;$

67. $2\log_2 6 + \log_2 \frac{35}{9} - \log_2 35;$

68. $\log_5 \frac{1}{4} - \log_5 \frac{2}{3} + \log_5 \frac{4}{9};$

69. $\log_4 \frac{1}{5} + \log_4 36 + \frac{1}{2} \log_4 \frac{25}{81};$

70. $\log_2 12 + \log_2 \frac{5}{3} + \log_2 \frac{4}{5};$

71. $-\log_2 \log_2 \sqrt[4]{2};$

72. $-\log_3 \log_3 \sqrt[3]{3};$

73. $2^{\log_4 9+1};$

74. $(\lg 72 - \lg 9) : (\lg 28 - \lg 7);$

75. $\lg \frac{1}{7} - \log_{100} \frac{1}{49};$

76. $\ln 9 + \log_{\sqrt{e}} \frac{1}{3} - \ln e^{1/3};$

77. $\lg 8 + \log_{\frac{1}{10}} 5 + \log_{\frac{1}{1000}} 64;$

78. $\log_{\sqrt{5}} \sqrt{64} + \log_5 \frac{25}{64} - \log_{\frac{1}{3}} 27;$

$$79. \log_{\sqrt[3]{3}} 2 + \log_3 \frac{1}{168} - \log_{25} 1 - \log_{\frac{1}{9}} 49;$$

$$80. \log_4 16 + \log_{\frac{1}{2}} 7 + \log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{49} - \log_{\frac{1}{3}} 3;$$

$$81. 36^{\log_6 5} + 25^{1-\lg 2};$$

Найти x :

$$82. \log_5 x = \log_5 10 - \log_5 3 + \log_5 2;$$

$$83. \log_{13} x = 2\log_{13} 13 - \frac{2}{5}\log_{13} 3 - \frac{4}{3}\log_{13} 7;$$

$$84. \lg x = \lg a - 4\lg b;$$

$$85. \lg x = 2\lg a - 3\lg b + 4\lg c;$$

$$86. \lg x = 2\lg(a+c) - 0,5\lg(a+c);$$

$$87. \lg x = \frac{2}{3}\lg a + 1,5\lg b;$$

$$88. \lg x = \frac{2}{3}(\lg a - \lg b) - \lg(a-b);$$

$$89. \log_4 x = \log_4(a+b) - \frac{2}{3}\left(2\log_4 a + \frac{3}{4}\log_4 b\right).$$

ОТВЕТЫ:

1. -4; 2. 0; 3. -2; 4. 2; 5. 0; 6. -3; 7. $-\frac{3}{2}$; 8. 3; 9. 73; 10. 64; 11. 9;

12. 49; 13. 100; 14. $\frac{9}{7}$; 15. 160; 16. 2; 17. 3; 18. -3; 19. 6; 20. 2; 21. 2;

22. 3; 23. 1; 24. $\frac{729}{8}$; 25. $x=6$; 26. $x=-2$; 27. $x=-3$; 28. $x=-\frac{1}{3}$;

29. $x=-\frac{1}{2}$; 30. $x=3$; 31. $x=-3$; 32. $x=-\frac{3}{2}$; 33. $x=\frac{1}{2}$; 34. $x=\frac{5}{2}$;

35. $x=\frac{7}{2}$; 36. $x=-2$; 37. $x=-\frac{3}{2}$; 38. $x=3$; 39. $x=2$; 40. $x=\frac{1}{16}$;

41. $x=\sqrt[3]{5}$; 42. $x=8$; 43. $x=\frac{1}{2}$; 44. $x=e^3$; 45. $x=e^{-3/2}$; 46. $x=500$;

47. $x=125$; 48. $x=\frac{e^{-5}}{4}$; 49. $x=4$; 50. $x=2$; 51. $x=\frac{1}{3}$; 52. $x=2$;

53. $x=3$; 54. $x=\frac{1}{5}$; 55. $x=\frac{1}{125}$; 56. $x=9$; 57. $x=12$; 58. $x=2$; 59. $x=5$;

60. $1+a$; 61. 1; 62. -1; 63. $\frac{a-2}{3}$; 64. $\frac{1}{49}$; 65. 2; 66. 2187; 67. 4; 68. $\frac{3}{2}$;

69. 4; 70. 16; 71. 3; 72. 2; 73. 6; 74. 2; 75. 1; 76. $\frac{2}{3}$; 77. $\frac{2}{5}$; 78. 22;

79. $\frac{1}{3}$; 80. 3; 81. $\frac{125}{4}$; 82. $x=\frac{20}{3}$; 83. $x=\frac{169}{3^{2/5} \cdot 7^{4/3}}$; 84. $x=\frac{a}{b^4}$;

85. $x=\frac{a^2 \cdot c^4}{b^3}$; 86. $x=(a+c)^{3/2}$; 87. $x=a^{2/3} \cdot b^{3/2}$; 88. $x=\frac{a^{2/3}}{b^{2/3}(a-b)}$;

89. $x=\frac{a+b}{a^{4/3} \cdot b^{1/2}}$.