

## Простейшие логарифмические уравнения

Решение простейших логарифмических уравнений основано на монотонности логарифмической функции

$$y = \log_a x \quad (a > 0; a \neq 1; D(y) = (0; +\infty); E(y) = R).$$

### Типы простейших логарифмических уравнений:

1)  $\log_a x = b$  при всех допустимых  $a$  имеет единственное решение  $x = a^b$ .

2)  $\log_a(f(x)) = b$  равносильно уравнению  $f(x) = a^b$ .

3)  $\log_a(f(x)) = g(x)$  равносильно уравнению  $f(x) = a^{g(x)}$ .

4)  $\log_a(f(x)) = \log_a g(x)$  равносильно системе 
$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases} \quad (*).$$

Причем любую из двух последних строк системы (\*) можно опустить.

В логарифмических уравнениях совершенно не обязательно находить области существования функций, входящих в уравнение. Достаточно проверить, какие из полученных корней уравнения удовлетворяют неравенствам в системе (\*).

### Решить уравнения:

1)  $\log_{\frac{1}{3}}\left(-\frac{1}{x}\right) = 2$

Решение:

$$\log_{\frac{1}{3}}\left(-\frac{1}{x}\right) = 2 \Leftrightarrow -\frac{1}{x} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \Leftrightarrow x = -9.$$

Ответ:  $x = -9$ .

2)  $\lg(2x - 5)^2 = 0$

Решение:

$$\lg(2x - 5)^2 = 0 \Leftrightarrow (2x - 5)^2 = 10^0$$

Это квадратное уравнение имеет два корня  $x_1 = 2, x_2 = 3$ .

Ответ:  $x_1 = 2, x_2 = 3$ .

$$3) 2\log_2 x + \log_{\sqrt{2}} x + \log_{\frac{1}{2}} x = 9$$

Решение:

$$D(y): x > 0.$$

$$2\log_2 x + \log_{\sqrt{2}} x + \log_{1/2} x = 9 \Rightarrow 2\log_2 x + \log_{2^{1/2}} x + \log_{2^{-1}} x = 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\log_2 x + 2\log_2 x - \log_2 x = 9 \Rightarrow 3\log_2 x = 9 \Rightarrow \log_2 x = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 2^3$$

т.е.  $x = 8$ .

Число  $x$  входит в  $D(y)$  и удовлетворяет исходному уравнению.

Ответ:  $x = 8$ .

$$4) \log_2(2x+1) - \log_2 x = \log_4 64$$

Решение:

$$D(y): x > 0.$$

$$\log_2(2x+1) - \log_2 x = \log_4 64 \Leftrightarrow \log_2(2x+1) - \log_2 x = \log_4 4^3 \Leftrightarrow \log_2 \frac{2x+1}{x} = 3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{2x+1}{x} = 2^3 \Rightarrow 2x+1 = 8x \Rightarrow x = \frac{1}{6}.$$

Число  $x$  входит в  $D(y)$  и удовлетворяет исходному уравнению.

Ответ:  $x = \frac{1}{6}$ .

$$5) \log_5(x+1)(x-1) = \log_5 2^3$$

Решение:

$$\log_5(x+1)(x-1) = \log_5 2^3 \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(x-1) = 2^3 \\ x-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = 8 \\ x > 1 \end{cases}.$$

$$x^2 - 1 = 8 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3. \text{ Учитывая, что } x > 1 \Rightarrow x = 3.$$

Ответ:  $x = 3$ .

$$6) \lg^2 x - \lg x = 2$$

Решение:

При решении логарифмических уравнений применяется метод введения новой переменной.

$$D(y): x > 0.$$

Сделаем замену:  $\lg x = t$ .

Тогда уравнение запишется в виде:  $t^2 - t - 2 = 0 \Rightarrow t_1 = -1, t_2 = 2$ .

Т.е.  $\lg x = -1$  и  $\lg x = 2$

Отсюда  $x_1 = \frac{1}{2}$  и  $x_2 = 4$ .

$x_1$  и  $x_2$  входит в  $D(y)$  и удовлетворяет исходному уравнению.

$$\text{Ответ: } x_1 = \frac{1}{2} \text{ и } x_2 = 4.$$

$$7) 6^{\log_6^2 x} + x^{\log_6 x} = 12$$

Решение:

$$D(y): x > 0.$$

$$\left(6^{\log_6 x}\right)^{\log_6 x} + x^{\log_6 x} = 12 \Rightarrow x^{\log_6 x} + x^{\log_6 x} = 12 \Rightarrow 2x^{\log_6 x} = 12 \Rightarrow x^{\log_6 x} = 6$$

Прологарифмируем обе части уравнения по основанию 6, получим:

$$\log_6 x^{\log_6 x} = \log_6 6 \Rightarrow \log_6 x \log_6 x = 1 \Rightarrow \log_6^2 x = 1 \Rightarrow \log_6 x = \pm 1$$

Т.е.  $x_1 = 6$  и  $x_2 = \frac{1}{6}$ . Оба значения  $x$  входят в область определения.

$$\text{Ответ: } x_1 = 6 \text{ и } x_2 = \frac{1}{6}.$$

**Решить уравнения:**

1.  $\log_3(2x - 1) = 2$ ;

2.  $\ln(3x - 5) = 0$ ;

3.  $\log_{\sqrt[3]{4}}(x - 1) = 6$ ;

4.  $\log_{1/7}(x + 5) = -1$ ;

5.  $\log_3 x = \log_3 1,5 + \log_3 8$ ;

6.  $\log_7 x = \log_7 12 - \log_7 3$ ;

7.  $\log_{0,3} x = 2\log_{0,3} 6 - \log_{0,3} 12$ ;

8.  $\log_a x = \log_a 5 + \log_a 3$ ;

9.  $\log_2(x^2 + 4x + 3) = 3$ ;

10.  $\log_7(2x^2 - 5x + 31) = 2$ ;

11.  $\log_5(x^2 - 11x + 43) = 2$ ;

12.  $\log_2(x + 3) = \log_2 16$ ;

13.  $\log_5(x + 1) = \log_5(4x - 5)$ ;

14.  $\log_{\sqrt[3]{3}}(x - 2) + 2\log_3(x - 2) = 10$ ;

15.  $\log_{1/3}(2x - 1) = \log_3 \frac{1}{x + 3}$ ;

16.  $2\log_{0,5} x = \log_{0,5}(2x^2 - x)$ ;

17.  $\log_3(x^2 - 4x - 5) = \log_3(7 - 3x)$ ;

18.  $\log_4(x^2 + 3x - 4) = \log_4 \frac{x - 1}{x + 4}$ ;

19.  $\log_5(x - 10) = 2 + \log_5 2$ ;

20.  $\lg(3-x) - \lg(x+2) = 2\lg 2$ ;
21.  $\log_{\frac{3}{5}} x + 4\log_{\frac{5}{3}} x = 3$ ;
22.  $\log_3 \sqrt{2x+1} = 1$ ;
23.  $\lg(3x-2) = 3 - \lg 25$ ;
24.  $\log_7 \frac{x+3}{3x-1} = \log_{\frac{1}{7}} \frac{1}{2}$ ;
25.  $\log_3 x + \log_9 x + \log_2 7x = 5,5$ ;
26.  $\log_2 x + \log_{\sqrt{2}} x + \log_{\frac{1}{8}} x = \frac{16}{3}$ ;
27.  $\lg x - \lg 3 = \lg(x+2) - \lg(x^2-4)$ ;
28.  $\lg(x-6) - 0,5\lg 2 = \lg 3 - \lg \sqrt{x-10}$ ;
29.  $\lg^2 x = 1$ ;
30.  $\log_5^2 x - \log_{\sqrt{5}} x - 3 = 0$ ;
31.  $\lg^2 x^3 + 10\lg x + 1 = 10$ ;
32.  $4\log_4^2(-x) + 2\log_4 x^2 + 1 = 0$ ;
33.  $\log_5^2 x + \log_{0,2} x = 2$ ;
34.  $\log_a x = \log_{\sqrt{a}} 2 + \log_{a^{-1}} 3$ ;
35.  $x^{\lg x} = 10000$ ;
36.  $x^{\log_2 x + 2} = 8$ ;
37.  $x^{\log_2 x - 2} = 8$ ;
38.  $\lg(6+x) - 0,5\lg(2x-3) = 2 - \lg 25$ ;

$$39. \frac{1}{\lg x - 6} + \frac{5}{\lg x + 2} = 1;$$

$$40. \lg \frac{x+6}{\sqrt{2x-3}} = \lg 4;$$

$$41. 3^{\log_3^2 x} + x^{\log_3 x} = 162;$$

$$42. \log_3 x \cdot \log_9 x \cdot \log_{27} x \cdot \log_{81} x = \frac{2}{3};$$

$$43. \lg(5+x) - \lg(3x+25) = \lg(x-15) - \lg 17;$$

$$44. \log_2(4-x) + \log_2(1-2x) = 2\log_2 3;$$

**Найти наибольшие корни уравнений:**

$$45. 2\log_3^2 x - 7\log_3 x + 3 = 0;$$

$$46. \log_3^2 x - 3\log_3 x + 2 = 0;$$

$$47. \lg^2 x^4 - \lg x^{14} - 2 = 0;$$

$$48. \log_2 6 = \log_2(x+3) + \log_2(x+2);$$

$$49. \ln(x^2 - 6x + 9) = \ln 3 + \ln(x+3);$$

**ОТВЕТЫ:**

1.  $x=5$ ; 2.  $x=2$ ; 3.  $x=17$ ; 4.  $x=2$ ; 5.  $x=12$ ; 6.  $x=4$ ; 7.  $x=3$ ; 8.  $x=15$ ;  
9.  $x=1$  и  $x=-5$ ; 10.  $x=-2$  и  $x=\frac{9}{2}$ ; 11.  $x=2$  и  $x=9$ ; 12.  $x=13$ ; 14.  $x=9$ ;  
15.  $x=4$ ; 16.  $x=1$ ; 17.  $x=-3$ ; 18.  $x=-5$ ; 19.  $x=60$ ;  
20.  $x=-1$ ; 21.  $x=\frac{5}{3}$ ; 22.  $x=4$ ; 23.  $x=14$ ; 24.  $x=1$ ; 25.  $x=27$ ;  
26.  $x=4$ ; 27.  $x=3$ ; 28.  $x=12$  и  $x=18$ ; 29.  $x=10$  и  $x=0,1$ ;  
30.  $x=0,2$  и  $x=125$ ; 31.  $x=1$  и  $x=10^{-\frac{10}{3}}$ ; 32.  $x=-\frac{1}{2}$ ; 33.  $x=0,2$  и  $x=25$ ;  
34.  $x=\frac{4}{3}$ ; 35.  $x=0,01$  и  $x=100$ ; 36.  $x=2$  и  $x=\frac{1}{8}$ ; 37.  $x=0,5$  и  $x=8$ ;  
38.  $x=6$  и  $x=14$ ; 39.  $x=100$  и  $x=10^8$ ; 40.  $x=6$  и  $x=14$ ; 41.  $x=9$  и  $x=\frac{1}{9}$ ;  
42.  $x=9$  и  $x=\frac{1}{9}$ ; 43.  $x=2$ ; 44.  $x=-\frac{1}{2}$ ; 45.  $x=27$ ; 46.  $x=9$ ;  
47.  $x=10$  и  $x=10^{1/8}$ ; 48.  $x=0$ ; 49.  $x=9$ .