

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Найдите область определения функции.

1. $y = \sqrt{4 - x^2}$.

2. $y = \sqrt{x - 5} + \sqrt{2 - x}$.

3. $y = \sqrt{x^2 + 10x + 16}$.

4. $y = \arccos(2x + 1)$.

5. $y = \ln(2 - x)$.

6. $y = \log_2(3 - x) + 2\log_x 5$.

7. $y = \frac{\log_5(x^2 + 4x)}{\sqrt{9 - x^2}}$.

Установите четность или нечетность функции.

8. $y = \cos 2x + x \sin x$.

9. $y = |x| - 3$.

10. $y = |x + 1| + 2$.

11. $y = \log_2(x^2 - 4)$.

12. $y = x^2 \sin 3x$.

13. $y = \cos 2x + \operatorname{tg}^2 x$.

Постройте линии, заданные уравнениями.

14. $y = 2x + 8$.

15. $y = |2x - 1|$.

16. $y = x^2 - 5x + 6$.

17. $y = x^2 - 5|x| + 6$.

18. $y = |x^2 - 5x + 6|$.

19. $|y| = x - 1$.

20. $|y| = x^2 + 3x + 2$.

21. $y = \frac{x + 5}{x + 1}$.

22. $y = \sqrt{4x + 8}$.

23. $y = \sin 3x$.

24. $y = 3\cos 2x - 4$.

25. $y = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

26. $y = 2^{x+1}$.

27. $y = \log_2(x - 1)$.

28. $|y| = \log_2 x$.

Вычислите пределы.

29. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^3 - 2x - 1}{x^4 + 4x^2 - 5}$.

30. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 2x + 10}{x^5 - x^2 - 5}$.

31. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 2x - 1}{2x^4 + 4x^2 - 5}$.

32. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 7x + 6}{x^2 + 4x + 7}$.

33. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 - 2x - 1}{x^4 + 4x^2 - 5}$.

34. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - x + 7}{x^2 + x - 3}$.

35. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-4)^2 + (n+3)^2}{3n^2 + 5}$.

36. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)^3 + (n-3)^3}{4n^3 + n + 3}$.

37. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 - (n+2)^3}{n^3 - 9n + 4}$.

38. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x + 4}{x^2 + 2x - 1}$.

39. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 2x - 1}{x^4 + 4x^2}$.

40. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x - 1}{x^3 + 8}$.

41. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 4x - 5}$.
42. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - x - 2}{x^2 - 4x + 3}$.
43. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 5x + 2}{x^2 - 4x + 4}$.
44. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 2x - 1}{x^4 + 4x^2 - 5}$.
45. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2x^2 - 3x - 2)^2}{x^3 + x^2 - 3x - 6}$.
46. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 5x^2 + 7x - 3}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}$.
47. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 4x^2 - 3x + 18}{x^3 - 5x^2 + 3x + 9}$.
48. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 + 7x^2 + 15x + 9}{x^3 + 8x^2 + 21x + 18}$.
49. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{3x + 1}}{x^2 + x}$.
50. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x + 5} - 2}$.
51. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 5x + 4}{\sqrt{x + 8} - 3}$.
52. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{10 + 2x} - \sqrt{1 - x}}{x^2 + x - 6}$.
53. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{1 + 4x} - 3}{\sqrt{1 + x} - \sqrt{3}}$.
54. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{8 + x} - \sqrt[3]{8 - x}}{2x^2 + x}$.
55. $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{\sqrt[3]{\frac{x}{9} - \frac{1}{3}}}{\sqrt{\frac{1}{3} + x} - \sqrt{2x}}$.
56. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{10 + x} - \sqrt{1 + x})$.
57. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x + 3} - \sqrt{x + 1})$.
58. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 3x} - \sqrt{x^2 + 2})$.
59. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{\frac{5}{x}}$.
60. $\lim_{x \rightarrow 1} (2x - 1)^{\frac{1}{x-1}}$.
61. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x + 2}{4x - 1} \right)^{\frac{x+1}{3}}$.
62. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x - 2}{3x + 5} \right)^{4x+1}$.
63. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 - x + 7}{2x^2 - x - 1} \right)^{-2x+1}$.
64. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + x - 7}{x^2 - 3x - 1} \right)^{4x+1}$.
65. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{4x + 2}{3x - 7} \right)^{x-5}$.
66. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{5x^2 + 7}{2x^2 - 3x} \right)^{1-x}$.
67. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2 - 7}{2x^2 - x - 1} \right)^{2x+1}$.
68. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{2x - 7}{8x - 1} \right)^{3-2x}$.
69. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \ln(1 + x))^{\frac{2}{x}}$.
70. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(5 - \frac{4}{\cos x} \right)^{\frac{1}{\sin^2 3x}}$.
71. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 2x}{x} \right)^{1+x}$.
72. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{11x + 8}{12x + 1} \right)^{\cos^2 x}$.
73. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x}{\operatorname{arctg} 7x}$.
74. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 5x}{x(e^{3x} - 1)}$.
75. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{e^{3x^2} - 1}$.

$$76. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln^4(1-2x)}{(1-\cos x)^2}.$$

$$77. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 1}{\sin 2x}.$$

$$78. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin^3 2x}{(1-\cos 5x)^2}.$$

$$79. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{3x+1}}{\cos \frac{\pi(x+1)}{2}}.$$

$$80. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(e^{\pi x} - 1)}{3(\sqrt[3]{1+x} - 1)}.$$

$$81. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\cos 4x - \cos 5x}.$$

$$82. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \arcsin 3x}{\operatorname{tg}(\pi(x+1))}.$$

$$83. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\ln x}.$$

$$84. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 3x}{\sin 2x}.$$

$$85. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin 7\pi x}{\sin 8\pi x}.$$

$$86. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(5-2x)}{\sqrt{10-3x} - 2}.$$

$$87. \lim_{x \rightarrow 0} (e^{x^2} - 1) \operatorname{ctg}^2 2x.$$

Исследуйте функцию на непрерывность. Постройте схематически график.

$$88. y = \frac{x^2 - 2x}{x - 2}.$$

$$89. y = \operatorname{arctg} \frac{1}{4-x}.$$

$$90. y = \operatorname{arctg} \frac{2}{x+1}.$$

$$91. y = \frac{3x-1}{x+3}.$$

$$92. y = \frac{x^2 - 3x}{x-4}.$$

$$93. y = \frac{|x-2|}{x-2}.$$

$$94. y = \frac{x+2}{x^2 - 2x}.$$

$$95. y = \frac{x}{x^2 - 2x}.$$

$$96. y = \begin{cases} x+2, & x < 0, \\ x^2 - 1, & x \geq 0; \end{cases}$$

$$97. y = \begin{cases} x, & x \leq -1, \\ \frac{3}{x+1}, & x > -1; \end{cases}$$

$$98. y = \begin{cases} x+4, & x \leq -2, \\ 3x+8, & x > -2. \end{cases}$$

$$99. y = \begin{cases} \frac{5}{x}, & x < 0, \\ x^2, & 0 \leq x < 3, \\ x+8, & x \geq 3. \end{cases}$$

Найдите производные функций.

$$100. y = 2^x \operatorname{arctg} x.$$

$$101. y = \frac{\arcsin x}{x^3 - 3x}.$$

$$102. y = \frac{8^x}{\sqrt[3]{x^2}}.$$

$$103. y = x \ln x + \arcsin \sqrt{x}.$$

$$104. y = \frac{7x^2 - 3x}{\log_2 x}.$$

$$105. y = \sqrt{\operatorname{arctg} x}.$$

$$106. y = \ln \operatorname{tg} \frac{2x+1}{4}.$$

$$107. y = \sqrt{5x^3 + 9 \operatorname{tg} x}.$$

108. $y = \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \sqrt{2x}$.
109. $y = (x^3 + \sin x) \log_3^2 x$.
110. $y = \frac{3 \cos^2 x}{x^2 - 7x + 2}$.
111. $y = e^{8x^2+3} \operatorname{ctg} x$.
112. $y = \ln \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}$.
113. $y = \sin 2x - \cos^2 x$.
114. $y = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x + \frac{1}{6} \operatorname{tg}^3 2x + \frac{1}{2} \operatorname{tg} 2x$.
115. $y = \sqrt{3x + \cos 3x}$.
116. $y = \operatorname{tg}^8 \frac{x}{8}$.
117. $y = \ln(x + \sqrt{x^2 - 3})$.
118. $y = \ln \frac{x+2}{x-2}$.
119. $y = 3^{\cos^2 x}$.
120. $y = \ln 2^{\sin^2 x}$.
121. $y = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}}$.
122. $y = \frac{1}{6\sqrt{2}} \arcsin \frac{x^3}{\sqrt{8}}$.
123. $y = \ln \ln x$.
124. $y = \ln \frac{x^2}{1-x^2}$.
125. $y = \ln(3x^2 + \sqrt{9x^4 + 1})$.
126. $y = \frac{1}{2} (x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x)$.
127. $y = \frac{1}{2} e^{x^2} (\sin 2x + \cos 2x)$.
128. $y = \frac{2^x}{\ln 2} \left(\ln x - \frac{1}{x} \right)$.
129. $y = \frac{1}{6} \sin^3 x^2$.
130. $y = \operatorname{tg}^3 \frac{x}{3}$.
131. $y = \frac{3}{\left(1 + \cos \frac{x}{3}\right)^2}$.
132. $y = 2^{3x^2} + \ln \sin x$.
133. $y = \sqrt{x} e^{\sqrt{x}}$.
134. $y = \ln \sin(3x+2)$.
135. $y = \frac{e^{-x^2}}{x-3}$.
136. $y = \ln \operatorname{arctg} \sqrt{1+x^2}$.
137. $y = \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \ln \sqrt{1-x^2}$.

ОТВЕТЫ

Математический анализ

1. $[-2; 2]$. 2. \emptyset . 3. $(-\infty; -8] \cup [-2; +\infty)$. 4. $[-1; 0]$. 5. $(-\infty; 2)$. 6. $(0; 1) \cup (1; 3)$. 7. $(0; 3)$.
8. Чётная. 9. Чётная. 10. Общего вида. 11. Чётная. 12. Нечётная. 13. Чётная. 29. 0. 30. 0.
31. $\frac{3}{2}$. 32. 3. 33. ∞ . 34. ∞ . 35. $\frac{2}{3}$. 36. $\frac{1}{2}$. 37. 0. 38. $\frac{5}{7}$. 39. 0. 40. ∞ . 41. $-\frac{1}{6}$. 42. $-\frac{5}{2}$.
43. ∞ . 44. $-\frac{1}{12}$. 45. 0. 46. 2. 47. $\frac{5}{4}$. 48. 2. 49. $-\frac{3}{2}$. 50. -8. 51. -18. 52. $-\frac{3}{20}$. 53. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$.
54. $\frac{1}{6}$. 55. $-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}$. 56. 0. 57. 0. 58. $\frac{3}{2}$. 59. e^{15} . 60. e^2 . 61. $e^{1/4}$. 62. $e^{-28/3}$. 63. 1. 64. e^{16} .
65. $+\infty (x \rightarrow +\infty)$, $0 (x \rightarrow -\infty)$. 66. $0 (x \rightarrow +\infty)$, $+\infty (x \rightarrow -\infty)$. 67. $0 (x \rightarrow +\infty)$,
 $+\infty (x \rightarrow -\infty)$. 68. $+\infty (x \rightarrow +\infty)$, $0 (x \rightarrow -\infty)$. 69. e^{-2} . 70. 1. 71. 2. 72. 8. 73. $\frac{2}{7}$. 74. $\frac{25}{3}$.

ZADACHENIK

$$75. \frac{8}{3}. 76. 64. 77. \frac{1}{2} \ln 2. 78. \frac{32}{625}. 79. \frac{3}{\pi}. 80. 2\pi. 81. \frac{2}{9}. 82. \frac{9}{\pi}. 83. 2. 84. -\frac{3}{2}. 85. \frac{7}{8}. 86. \frac{8}{3}.$$

$$87. \frac{1}{4}. 88. x=2 - \text{точка устранимого разрыва}. 89. x=4 - \text{точка неустранимого разрыва}.$$

$$90. x=-1 - \text{точка неустранимого разрыва}. 91. x=-3 - \text{точка разрыва 2 рода}. 92. x=4 - \text{точка разрыва 2 рода}. 93. x=2 - \text{точка неустранимого разрыва}. 94. x=0 \text{ и } x=2 - \text{точки}$$

$$\text{разрыва 2 рода}. 95. x=0 - \text{точка устранимого разрыва}, x=2 - \text{точка разрыва 2 рода}$$

$$96. x=0 - \text{точка неустранимого разрыва}. 97. x=-1 - \text{точка разрыва 2 рода}. 98. \text{Функция}$$

$$\text{непрерывна}. 99. x=0 - \text{точка разрыва 2 рода}. 100. 2^x \ln 2 \operatorname{arctg} x + \frac{2^x}{1+x^2}.$$

$$101. \frac{x^2 - 3x + 3\sqrt{(1-x^2)^3} \arcsin x}{(x^3 - 3x)^2 \sqrt{1-x^2}}. \quad 102. \frac{8^x (3x \ln 2 - 2)}{\sqrt[3]{x^5}}. \quad 103. \ln x + 1 + \frac{1}{2\sqrt{x(1-x)}}.$$

$$104. \frac{x(14x-3) \ln x - 7x^2 + 3x}{x \cdot \ln 2 \cdot \log_2^2 x}. \quad 105. \frac{1}{2(1+x^2)\sqrt{\operatorname{arctg} x}}. \quad 106. \frac{1}{\sin \frac{2x+1}{2}}.$$

$$107. \frac{15x^2 \cos^2 x + 9}{2 \cos^2 x \sqrt{5x^3 + 9 \operatorname{tg} x}}. \quad 108. \frac{1}{2\sqrt{x(1-2x)}}. \quad 109. (3x^2 + \cos x) \log_3^2 x + 2(x^3 + \sin x) \frac{\log_3 x}{x \ln 3}.$$

$$110. \frac{-3 \sin 2x(x^2 - 7x + 2) - 3(2x - 7) \cos^2 x}{(x^2 - 7x + 2)^2}. \quad 111. \frac{e^{8x^2+3}}{\sin^2 x} (8x \sin 2x - 1). \quad 112. \frac{2x}{x^4 - 1}.$$

$$113. 2 \cos 2x + \sin 2x. \quad 114. \frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{1}{\cos^2 2x}. \quad 115. \frac{3(1 - \sin 3x)}{2\sqrt{3x + \cos 3x}}. \quad 116. \operatorname{tg}^7 \frac{x}{8} / \cos^2 \frac{x}{8}.$$

$$117. \frac{1}{\sqrt{x^2 - 3}}. \quad 118. \frac{4}{4 - x^2}. \quad 119. -\ln 3 \cdot \sin 2x \cdot 3^{\cos^2 x}. \quad 120. \sin 2x \cdot \ln 2. \quad 121. \frac{1}{2 + x^2}.$$

$$122. \frac{x^2}{2\sqrt{16 - 2x^6}}. \quad 123. \frac{1}{x \ln x}. \quad 124. \frac{2}{x(1-x^2)}. \quad 125. \sqrt{\frac{6x}{9x^4 + 1}}. \quad 126. \sqrt{1-x^2}.$$

$$127. e^{x^2} (x \sin 2x + x \cos 2x + \cos 2x - \sin 2x). \quad 128. \frac{2^x}{x^2 \ln 2} (x^2 \ln 2 \cdot \ln x - x \ln 2 + x + 1).$$

$$129. x \sin^2 x^2 \cos x^2. \quad 130. \operatorname{tg}^2 \frac{x}{3} / \cos^2 \frac{x}{3}. \quad 131. \frac{2 \sin \frac{x}{3}}{\left(1 + \cos \frac{x}{3}\right)^3}. \quad 132. 6x \cdot 2^{3x^2} \ln 2 + \operatorname{ctg} x.$$

$$133. \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} (\sqrt{x} + 1). \quad 134. 3 \operatorname{ctg} (3x + 2). \quad 135. -\frac{e^{-x^2} (2x^2 - 6x + 1)}{(x-3)^2}.$$

$$136. \frac{x}{(2+x^2)\sqrt{1+x^2} \operatorname{arctg} \sqrt{1+x^2}}. \quad 137. \frac{\arcsin x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}.$$

Производная и ее применение

Найдите производные функций.

1. $y = (2x + \sin 2x)^3$.

2. $y = \sqrt[3]{(1+x^5)^2}$.

3. $y = \frac{2}{15\sqrt{1+x}}$.

4. $y = x - \ln(2 + e^x)$.

5. $y = \frac{2}{3}\sqrt{\operatorname{arctg}^5 3x}$.

6. $y = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} \frac{e^x - 3}{2}$.

7. $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$.

8. $y = \arcsin e^x - \sqrt{1 - e^{2x}}$.

9. $y = \ln \log_5 \operatorname{tg} x$.

10. $y = x^2 \cos^2 12x$.

11. $y = \frac{\cos^2 3x}{4 \sin 4x}$.

12. $y = \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x}$.

13. $y = \sqrt{x} + \frac{1}{3} \arccos \sqrt{x} + \frac{8}{3} \operatorname{arctg} \sqrt{x}$.

14. $y = e^{(x^2+1)\cos x}$.

15. $y = 2^{\sin x^3}$.

16. $y = x^5 - e^{-x} \arcsin x - \ln(1 + \sqrt{1+x^2})$.

17. $y = (\sin x)^{\cos x}$.

18. $y = (x+1)^{\frac{2}{x}}$.

19. $y = (x^2 + 1)^{\sin x}$.

20. $y = \frac{(x-2)^2 \sqrt[3]{x+1}}{(x-5)^3}$.

21. $y = \sqrt[3]{\frac{x(x^2+1)}{(x^2-1)^2}}$.

22. $y = \sqrt{x \sin x \sqrt{1-e^x}}$.

Найдите производные второго порядка функций.

23. $y = \sin^2 x$.

25. $y = \operatorname{tg} x$.

24. $y = -\frac{3}{3x^2 - 5}$.

Найдите производные указанного порядка.

26. $y = x \ln x, y'''$.

28. $y = \arcsin x, y^{IV}$.

27. $y = xe^{-x}, y'''$.

Найдите производные n -ного порядка функций.

29. $y = \sin x$.

31. $y = 2^x + 2^{-x}$.

30. $y = \ln x$.

32. Покажите, что функция $y = e^x + 2e^{2x}$ удовлетворяет уравнению $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$.

Составьте уравнения касательной и нормали к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0 .

33. $y = 4 + x^2$, $x_0 = 2$.

35. $y = \frac{8}{4 + x^2}$, $x_0 = 2$.

34. $y = \frac{1}{3}x^3 - 4x + 1$, $x_0 = 3$.

36. Составьте уравнения касательных к графику функции $y = 4x - x^2$ в точках пересечения с осью Ox .

37. Составьте уравнение нормали к линии $y = 2 - \sqrt{x}$ в точке ее пересечения с биссектрисой первого координатного угла.

38. Покажите, что касательные, проведенные к гиперболе $y = \frac{x-4}{x-2}$ в точках ее пересечения с координатными осями, параллельны между собой.

39. Докажите, что касательные к линии $y = \frac{1+3x^2}{3+x^2}$, проведенные в точках, для которых $y = 1$, пересекаются в начале координат.

Найдите производные от y по x .

40. $\begin{cases} x = 1 - t^2, \\ y = 1 - t^3. \end{cases}$

42. $\begin{cases} x = \ln(1 + t^2), \\ y = t - \operatorname{arctg} t. \end{cases}$

41. $\begin{cases} x = \frac{t+1}{t}, \\ y = \frac{t-1}{t}. \end{cases}$

43. $\begin{cases} x = e^t \sin t, \\ y = e^t \cos t. \end{cases}$

Найдите производные второго порядка $\frac{d^2y}{dx^2}$.

44. $\begin{cases} x = at^2, \\ y = bt^3. \end{cases}$

46. $\begin{cases} x = \ln t, \\ y = t^2 - 1. \end{cases}$

45. $\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = a \sin t. \end{cases}$

Найдите производные третьего порядка $\frac{d^3y}{dx^3}$.

47. $\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t. \end{cases}$

48. $\begin{cases} x = a \cos^3 t, \\ y = b \sin^3 t. \end{cases}$

49. Покажите, что функция $y = f(x)$, заданная параметрически уравнениями

$\begin{cases} x = e^t \sin t, \\ y = e^t \cos t, \end{cases}$ удовлетворяет соотношению $y''(x+y)^2 = 2(xy' - y)$.

Составьте уравнения касательной и нормали к данной линии в указанной точке.

$$50. \begin{cases} x = 2e^t, \\ y = e^{-t}, \end{cases} t_0 = 0.$$

$$52. \begin{cases} x = 2 \ln \operatorname{ctg} t + 1, \\ y = \operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t \end{cases}, t_0 = \frac{\pi}{4}.$$

$$51. \begin{cases} x = \sin t, \\ y = \cos 2t, \end{cases} t_0 = \frac{\pi}{6}.$$

Найдите производную от функции y , заданной неявно.

$$53. x^4 + y^4 = x^2 y^2.$$

$$56. 2^x + 2^y = 2^{x+y}.$$

$$54. \sin(xy) + \cos(xy) = \operatorname{tg}(x+y).$$

$$57. x - y = \arcsin x - \arcsin y.$$

$$55. 2y \ln y = x.$$

$$58. \text{Найдите } \frac{d^2 y}{dx^2}: 1) b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2; 2) e^{x+y} = xy; 3) y^3 + x^3 - 3axy = 0.$$

$$59. \text{Найдите } \frac{d^3 y}{dx^3}: 1) x^2 - xy + y^2 = 1; 2) y = \operatorname{tg}(x+y).$$

60. Найдите производные первого, второго и третьего порядков в точке $M(3; 4)$ от функции $y = y(x)$, заданной уравнением $x^2 + y^2 = 25$.

$$61. \text{Найдите } \frac{d^2 y}{dx^2} \text{ от функции, заданной уравнением } e^y + xy = e, \text{ при } x = 0.$$

62. Составьте уравнения касательной к линии $x^2(x+y) = a^2(x-y)$ в начале координат.

63. Составьте уравнения касательной и нормали к кривой $xy + \ln y = 1$ в точке $M(1; 1)$.

Найдите дифференциал функции.

$$64. y = \operatorname{tg}^2 x.$$

$$65. y = \sqrt{\arcsin x} + (\arctg x)^2.$$

Найдите интервалы монотонности и точки экстремума функции.

$$66. y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 9.$$

$$71. y = \frac{3x^2 + 4x + 4}{x^2 + x + 1}.$$

$$67. y = x^2(x-2)^2.$$

$$72. y = xe^{3x}.$$

$$68. y = 1 - \sqrt[3]{x^2 - 2x}.$$

$$73. y = x - \ln x.$$

$$69. y = 2x^3 - 3x^2 - 4.$$

$$74. y = \frac{x^4}{x^3 - 1}.$$

$$70. y = (x+1)^2(x-1)^2.$$

Найдите наибольшее и наименьшее значения функций на заданных отрезках.

$$75. y = 3 + 2x^2 - 8x^4, \quad [-2; 0].$$

$$79. y = 2x^2 - \sqrt{x}, \quad [0; 4].$$

$$76. y = x - 2 \ln x, \quad [1; e].$$

$$80. y = 2^x, \quad [-1; 5].$$

$$77. y = x - 2\sqrt{x}, \quad [2; 4].$$

$$81. y = \frac{x^2}{3x-6}, \quad [3; 5].$$

$$78. y = x + \frac{1}{x}, \quad [0,01; 100].$$

82. $y = x - \sin x, \left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

83. $y = x^2 e^{-x}, [-1; 4]$.

84. Как разбить число 5 на два слагаемых, чтобы сумма их кубов была наименьшей?

85. Из прямоугольного листа картона размером $2,4 \times 1,5 \text{ м}^2$ требуется изготовить коробку без крышки. Какова должна быть сторона квадратов, вырезанных из четырёх углов листа, чтобы объём полученной коробки был максимальным? Чему равен объём такой коробки?

86. Если собрать урожай в начале августа, то с каждой сотки можно получить 200 кг раннего картофеля и реализовать его по 12 руб. за килограмм. Отсрочка уборки на каждую неделю ведет к увеличению урожайности на 50 кг с одной сотки, но цена картофеля за килограмм при этом падает на 2 руб. Когда следует собрать картофель, чтобы доход от его продажи был максимальным, если срок уборки составляет 5 недель?

87. Требуется огородить прямоугольную площадь вдоль уже выстроенной стены. Стоимость ограждения стороны, параллельной стене, равна 60 руб. за метр; стоимость ограждения двух других сторон составляет 90 руб. за метр. Какая максимальная площадь может быть огорожена, если имеется всего 10 800 руб.?

88. Прямоугольный участок разделен перегородкой, параллельной меньшей из сторон прямоугольника. Стоимость установки внешнего ограждения составляет 900 руб. за метр, а перегородки – 1600 руб. за метр. Общая площадь участка 153 м^2 . Определите размеры участка, стоимость строительства ограждения которого была бы наименьшей.

89. Каковы должны быть размеры бассейна с квадратным дном объёмом 32 м^3 , чтобы на его облицовку пошло как можно меньше материала?

Найдите точки перегиба и промежутки выпуклости графика функции.

90. $y = 6x - x^3$.

94. $y = 2x^2 + \ln x$.

91. $y = x^3 - 6x^2 + 2x + 1$.

95. $y = x + \frac{6}{x}$.

92. $y = x^4 + 2x^3 - 12x^2 - 5x + 2$.

93. $y = x^4 - 8x^3 + 18x^2 - 4x$.

96. При каком значении a кривая $y = x^3 + ax^2 + 1$ имеет точку перегиба при $x = 1$?

97. При каких значениях a кривая $y = x^4 + ax^3 + \frac{3}{2}x^2 + 1$ будет иметь выпуклость вниз на всей числовой прямой?

Вычислите пределы, используя правило Лопитала.

98. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos x}{x - \pi}$.

99. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 3x^2 - 2}{x^3 - 4x^2 + 5}$.

$$100. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\ln(1+x)}.$$

$$101. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} - x - 1}{\cos x + \frac{x^2}{2} - 1}.$$

$$102. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi - 2 \operatorname{arctg} x}{e^{3/x} - 1}.$$

$$103. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2}.$$

$$104. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^3}.$$

$$105. \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x}.$$

$$106. \lim_{x \rightarrow 0} (\arcsin x \cdot \operatorname{ctg} x).$$

$$107. \lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}.$$

$$108. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x \sin x} - \frac{1}{x^2} \right).$$

$$109. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\pi - 2x)^{\cos x}.$$

$$110. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x)^{2x-\pi}.$$

$$111. \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 3^x)^{1/x}.$$

$$112. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\ln(x-5)}{\ln(e^x - e^5)}.$$

$$113. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\ln \sin x}.$$

$$114. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \sin 2x}{\ln \sin x}.$$

$$115. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{ctg}(x-1)}{\ln(1-x)}.$$

$$116. \lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{ctg} \pi x.$$

$$117. \lim_{x \rightarrow +0} x^2 \log_2 x.$$

$$118. \lim_{x \rightarrow \pi/4} (\sin 2x)^{\frac{1}{x-\pi/4}}.$$

$$119. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \right)^{\operatorname{tg} x}.$$

$$120. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_2(3x+1)}{\sqrt[3]{x}}.$$

$$121. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 3^x}{x + \operatorname{arctg} x}.$$

Найдите асимптоты графика функции.

$$122. y = \frac{17-x^2}{x-5}.$$

$$123. y = \frac{x^2-1}{\sqrt{x^2-4}}.$$

$$124. y = 2x + \operatorname{arctg} x.$$

$$125. y = x^2 e^{2x}.$$

$$126. y = \frac{4x^2+9}{4x+8}.$$

$$127. y = \frac{3}{x^2-2x}.$$

Проведите полное исследование функции и постройте график.

$$128. y = 3x - x^3.$$

$$129. y = (x-1)^2 (x-3)^2.$$

$$130. y = 2x^2 - 2 - x^3.$$

$$131. y = (2x+1)^2 (2x-1)^2.$$

$$132. y = \frac{x^3 + 3x^2}{4} - 5.$$

$$133. y = \frac{x^3 + 4}{x^2}.$$

$$134. y = \frac{3-2x}{(x-2)^2}.$$

$$135. y = x^2 \ln x.$$

$$136. y = (x-4)e^{x-1}.$$

$$137. y = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2}.$$

$$138. y = \frac{4x^2}{3+x^2}.$$

$$139. y = x\sqrt{1-x}.$$

$$140. y = \frac{e^x}{x}.$$

$$141. y = \ln \frac{x-1}{x}.$$

ZADACHENIK

Отвѣты

19. $(x^2 + 1)^{\sin x - 1} \left((x^2 + 1) \cos x \ln(x^2 + 1) + 2x \sin x \right)$. 20. $-\frac{2(x-2)(x^2 + 11x + 1)}{3\sqrt[3]{(x+1)^2(x-5)^4}}$.
21. $-\frac{2(x^4 + 6x^2 + 1)}{3\sqrt[3]{x^2(x^2 + 1)^2(x^2 - 1)^5}}$. 22. $\frac{1}{2} \sqrt{x \sin x \sqrt{1 - e^x}} \left(\frac{1}{x} + \operatorname{ctg} x + \frac{e^x}{2(e^x - 1)} \right)$. 23. $y'' = 2 \cos 2x$.
24. $y'' = -\frac{18(9x^2 + 5)}{(3x^2 - 5)^3}$. 25. $y'' = \frac{2 \sin x}{\cos^3 x}$. 26. $y''' = -\frac{1}{x^2}$. 27. $y''' = (3 - x)e^{-x}$.
28. $y^{IV} = \frac{6x^3 + 9x}{\sqrt{(1 - x^2)^7}}$. 29. $y^{(2n)} = (-1)^n \sin x$, $y^{(2n+1)} = (-1)^n \cos x$, $n = 0, 1, 2, \dots$
30. $y^{(n)} = \frac{(-1)^{n+1} (n-1)!}{x^n}$, $n = 1, 2, \dots$. 31. $y^{(n)} = \ln^n 2 \left(2^x + (-1)^n 2^{-x} \right)$, $n = 0, 1, 2, \dots$
33. $y = 4x$, $y = -\frac{1}{4}x + \frac{17}{2}$. 34. $y = 5x - 17$, $y = -\frac{1}{5}x - \frac{7}{5}$. 35. $y = -\frac{1}{2}x + 2$, $y = 2x - 3$.
36. $y = 4x$, $y = -4x + 16$. 37. $y = 2x - 1$. 38. $y'(0) = y'(4) = \frac{1}{2}$. 39. $y = x$, $y = -x$.
40. $\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}t$. 41. $\frac{dy}{dx} = -1$. 42. $\frac{dy}{dx} = \frac{t}{2}$. 43. $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos t - \sin t}{\cos t + \sin t}$. 44. $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3b}{4a^2t}$.
45. $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{a \sin^3 t}$. 46. $\frac{d^2y}{dx^2} = 4t^2$. 47. $\frac{d^3y}{dx^3} = -\frac{3b \cos t}{a^3 \sin^5 t}$. 48. $\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{b(\cos^2 t - 4\sin^2 t)}{9a^3 \sin^3 t \cos^7 t}$.
49. $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos t - \sin t}{\cos t + \sin t}$, $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2}{e^t (\cos t + \sin t)^3}$. 50. $x + 2y - 4 = 0$, $2x - y - 3 = 0$.
51. $4x + 2y - 3 = 0$, $2x - 4y + 1 = 0$. 52. $y = 2$, $x = 1$. 53. $\frac{x^4}{y} \cdot \frac{y^2 - 2x^2}{2y^2 - x^2}$.
54. $\frac{y \cos^2(x+y)(\cos(xy) - \sin(xy)) - 1}{x \cos^2(x+y)(\cos(xy) - \sin(xy)) - 1}$. 55. $\frac{1}{2(1 + \ln y)}$. 56. $2^{x-y} \cdot \frac{2^y - 1}{1 - 2^x}$.
57. $\frac{\sqrt{1-y^2}(1-\sqrt{1-x^2})}{\sqrt{1-x^2}(1-\sqrt{1-y^2})}$. 58. 1) $-\frac{b^4}{a^2y^3}$; 2) $-\frac{y((x-1)^2 + (y-1)^2)}{x^2(y-1)^2}$; 3) $-\frac{2a^3xy}{(y^2 - ax)^3}$.
59. 1) $\frac{54x}{(x-2y)^5}$; 2) $-\frac{2(3y^4 + 8y^2 + 5)}{y^8}$. 60. $-\frac{3}{4}$, $-\frac{25}{64}$, $-\frac{225}{1024}$. 61. $\frac{1}{e^2}$. 62. $y = x$.
63. $x + 2y - 3 = 0$, $2x - y - 1 = 0$. 64. $\frac{2 \operatorname{tg} x}{\cos^2 x} dx$. 65. $\left(\frac{1}{2\sqrt{1-x^2} \sqrt{\arcsin x}} + \frac{2 \operatorname{arctg} x}{1+x^2} \right) dx$.

66. $y_{\max} = y(1) = -4$, $y_{\min} = y(2) = -5$. 67. $y_{\max} = y(1) = 1$, $y_{\min} = y(0) = 0$, $y_{\min} = y(2) = 0$.
68. $y_{\max} = y(1) = 2$. 69. $y_{\max} = y(0) = -4$, $y_{\min} = y(1) = -5$. 70. $y_{\max} = y(0) = 1$,
 $y_{\min} = y(-1) = 0$, $y_{\min} = y(1) = 0$. 71. $y_{\max} = y(0) = 4$, $y_{\min} = y(-2) = \frac{8}{3}$.
72. $y_{\min} = y\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3e}$. 73. $y_{\min} = y(1) = 1$. 74. $y_{\max} = y(0) = 0$, $y_{\min} = y(\sqrt[3]{4}) = \frac{4\sqrt[3]{4}}{3}$.
75. $y_{\text{наим}} = -117$, $y_{\text{наиб}} = \frac{25}{8}$. 76. $y_{\text{наим}} = 2(1 - \ln 2)$, $y_{\text{наиб}} = 1$. 77. $y_{\text{наим}} = 2 - 2\sqrt{2}$, $y_{\text{наиб}} = 0$.
78. $y_{\text{наим}} = 2$, $y_{\text{наиб}} = 100,01$. 79. $y_{\text{наим}} = -\frac{3}{8}$, $y_{\text{наиб}} = 30$. 80. $y_{\text{наим}} = \frac{1}{2}$, $y_{\text{наиб}} = 32$.
81. $y_{\text{наим}} = \frac{24}{9}$, $y_{\text{наиб}} = 3$. 82. $y_{\text{наим}} = 1 - \frac{\pi}{2}$, $y_{\text{наиб}} = \pi$. 83. $y_{\text{наим}} = 0$, $y_{\text{наиб}} = e$. 84. 2,5 и 2,5.
85. 0,3 м, $V = 0,486 \text{ м}^3$. 86. Через одну неделю. 87. $2700 \text{ м}^2 = 30 \times 90$. 88. 17×9 . 89. Высота
2 м, сторона дна 4 м. 90. Выпуклая вниз на $(-\infty; 0)$, выпуклая вверх на $(0; +\infty)$.
91. Выпуклая вниз на $(2; +\infty)$, выпуклая вверх на $(-\infty; 2)$. 92. Выпуклая вниз на
 $(-\infty; -2)$ и $(1; +\infty)$, выпуклая вверх на $(-2; 1)$. 93. Выпуклая вниз на $(-\infty; 1)$ и $(3; +\infty)$,
выпуклая вверх на $(1; 3)$. 94. Выпуклая вниз на $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$, выпуклая вверх на $\left(0; \frac{1}{2}\right)$.
95. Выпуклая вниз на $(0; +\infty)$, выпуклая вверх на $(-\infty; 0)$. 96. $a = -3$. 97. $|a| \leq 2$. 98. 0.
99. $-\frac{3}{11}$. 100. 2. 101. 1. 102. $\frac{2}{3}$. 103. $+\infty$. 104. 0. 105. 0. 106. 1. 107. $\frac{2}{\pi}$. 108. $\frac{1}{6}$. 109. 1.
110. 1. 111. 3. 112. 1. 113. 1. 114. 1. 115. ∞ . 116. $\frac{1}{\pi}$. 117. 0. 118. 1. 119. 1. 120. 0.
121. $\frac{\ln 2 - \ln 3}{2}$. 122. $x = 5$, $y = -x - 5$. 123. $x = \pm 2$, $y = x$ ($x \rightarrow +\infty$), $y = -x$ ($x \rightarrow -\infty$).
124. $y = 2x \pm \frac{\pi}{2}$ ($x \rightarrow \pm\infty$). 125. $y = 0$ ($x \rightarrow -\infty$). 126. $x = -2$, $y = x - 2$. 127. $x = 0$, $x = 2$,
 $y = 0$.

1. Найти и изобразить область определения функции:

- а) $z = \ln(2x - 4y + 4)$; б) $z = \sqrt{3 - y + x}$; в) $z = \ln(2x^2 - y + 1)$; г) $z = \ln(2x + y - 4)$;
д) $z = \ln(x - 3y + 3)$; е) $z = \sqrt{2x + 3y - 6}$; ж) $z = \arccos(x + y - 1)$.

2. Область ограничена параллелограммом со сторонами: $y = 0$, $y = 2$, $y = x/2$, $y = x/2 - 1$.
Граница параллелограмма исключается. Задать эту область неравенствами.

3. Найти частные производные:

- | | | |
|---|--|---|
| 1. $z = x^3 + 3x^2y - y^3$ | 13. $z = \cos \frac{3x + 5y}{4y - 2x}$ | 28. $z = \operatorname{arctg}(y\sqrt{x})$ |
| 2. $z = x^2y^3 + x^3y$ | 14. $z = x^2 \cos y$ | 29. $z = \operatorname{arctg}(y^2x + \sqrt{x})$ |
| 3. $z = \sin(x + y) + \ln(2x)$ | 15. $z = xye^{x+2y}$ | 30. $z = e^{y+x} \operatorname{tg}(y^2x)$ |
| 4. $z = \frac{x}{y}$ | 16. $z = \ln(x + \ln y)$ | 31. $z = y + \ln \frac{1+x}{x+2y}$ |
| 5. $z = \frac{xy + 5}{y^2 + x^2}$ | 17. $z = x\sqrt{y} + \frac{y}{\sqrt[3]{x}}$ | 32. $z = \cos(1 + xy - 3\sqrt[3]{x})$ |
| 6. $z = \frac{x + y + 5}{y^2x}$ | 18. $z = \sqrt{x} \sin \frac{x}{y}$ | 33. $z = e^x (\cos y + x \sin y)$ |
| 7. $z = \sin \frac{x}{y}$ | 19. $z = \operatorname{arctg} \frac{x+1}{y}$ | 34. $z = \ln(x + e^{xy})$ |
| 8. $z = \frac{xy}{y^2 + yx}$ | 20. $z = x^2 \operatorname{tg}(8y + x)$ | 35. $z = x^3 + \cos x + 5xy + y^2 + 1$ |
| 9. $z = \sin \frac{1}{y+x}$ | 21. $z = \arcsin(x^2 + y^3)$ | 36. $z = e^{3x+y} + \operatorname{tgy} + xy + y^2 - 10$ |
| 10. $z = \operatorname{tg} \frac{x+y}{y}$ | 22. $z = (y^3 + x) \cos(x^2y)$ | 37. $z = x^3 + \ln(2y - x) - xy + y^2$ |
| 11. $z = e^{xy} \cos \frac{1}{y}$ | 23. $z = y^3 \cos(x^3 + \sqrt{y})$ | 38. $z = \ln\left(x + \frac{y}{2x}\right)$ |
| 12. $z = \sin(x + y)$ | 24. $z = \cos(y) \cdot e^{x+y^2}$ | в точке $M(1,2)$ |
| | 25. $z = x \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ | |
| | 26. $z = \ln \sqrt{x^2y^2 + 1}$ | |
| | 27. $z = 2^x \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ | |

4. Найти производные второго порядка:

1. $z = x^4 + 4x^2y^3 + 7xy + 6$
2. $z = y \ln x$
3. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$
4. $z = e^{x+y^2}$
5. $z = x + y + xy$
6. $z = y^4 + 3x^2y + 2xy^2 - 5x - 7$

5. Найти указанные частные производные.

а) $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $z = \sin(xy)$; б) $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$, $z = e^{xy^2}$; в) $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$, $z = \ln(x^2 + y^2)$; г) $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$, $u = e^{xyz}$.

6. Найти полные дифференциалы функций.

а) $z = x^2 y^4 - x^3 y^3 + x^4 y^2$.

в) $z = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$.

б) $z = \arcsin \frac{x}{y}$.

г) $z = \sin(xy)$.

7. С помощью полного дифференциала функции двух переменных вычислить приближенно значение функции.

а) $f(x, y) = e^{xy}$, $x = 5,1$; $y = 0,05$.

б) $z(x, y) = 2xy + 3y - 5x$, $x = 3,04$; $y = 3,95$.

8. Вычислить приближенно:

а) $1,04^{2,02}$;

б) $\ln(\sqrt[3]{1,03} + \sqrt[4]{0,98} - 1)$.

9. Найти указанные производные.

а) $\frac{du}{dt}$, если $u = e^{x-2y}$, $x = \sin t$, $y = t^3$.

б) $\frac{du}{dt}$, если $u = x^2 + y^2 + xy$, $x = \sin t$, $y = e^t$.

в) $\frac{dz}{dt}$, если $z = \arcsin(x - y)$, $x = 3t$, $y = 4t^3$.

г) $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$, если $z = x^2 y - y^2 x$, $x = u \cos v$, $y = u \sin v$.

д) $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$, если $z = x^2 \ln y$, $x = \frac{u}{v}$, $y = 3u - 2v$.

10. Найти производные от функций, заданных неявно.

а) $x^3 y - y^3 x = a^4$.

б) $e^y x + e^x y - e^{xy} = 0$.

в) $xy - \ln y = a$.

11. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ для следующих функций.

а) $x^2 - 2y^2 + z^2 - 4x + 2z - 5 = 0$.

б) $z^3 + 3xyz = a^3$.

12. Найти уравнения касательной и нормали к линиям в указанных точках.

а) $x^3 y + y^3 x = 3 - x^2 y^2$, $M(1,1)$.

б) $2x^3 - x^2 y + 3x^2 + 4xy - 5x - 3y + 6 = 0$ в точке ее пересечения с осью Oy .

13. Для данных поверхностей найдите уравнения касательных плоскостей и нормалей в указанных точках.

а) $z = 2x^2 - 4y^2$, $M(2,1,4)$.

б) $x^3 + y^3 + z^3 + xyz = 6$, $M(1,2,-1)$.

в) $z = xy$, $M(1,1,1)$.

г) $3x^4 - 4y^3z + 4xyz^2 - 4xz^3 + 1 = 0$, $M(1,1,1)$.

14. Найти экстремум функции

1. $z = xy - x^2 - 2y^2 + x + 10y - 8$;

2. $z = 3x^2 + 3y^2 + 5xy + 4x + 7y + 5$.

3. $z = 3xy + 3x^2 + y^2 - 6x - 2y + 1$;

4. $z = 3xy - x^2 - 3y^2 - 6x + 9y - 4$;

5. $z = 3x^2 - x^3 + 3y^2 + 4y$;

6. $z = x^2 + 3y^2 - 6xy + 4x - 2$.

7. $z = x^2 - y^2 + 2xy + 4x$.

15. Найти наименьшее и наибольшее значения функции в заданной замкнутой области:

1. $z = x^2 + y^2 - 4xy - 4$ в квадрате $0 \leq x \leq 4$, $0 \leq y \leq 4$.

2. $z = x^2 - y^2 + 4xy - 6x - 2y$ в треугольнике, ограниченном осями координат Ox и Oy и прямой $y = 4 - x$.

3. $z = x^2 - 2xy + 3$ в области, ограниченной параболой $y = 4 - x^2$ и осью Ox .

4. $z = x^2 + 2y^2 + 4xy + 4$ в квадрате $-1 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 2$.

16. Найти градиент функции в точке M_0 :

а) $z = 4 - x^2 - y^2$ в точке $M(1;2)$;

б) $z = (x - y)^2$ в точке $M(1;-1)$;

в) $z = xy - 2 + x^2$ в точке $M(2;-1)$.

17. а) Найти градиент функции в точке M_0 ;

б) Найти производную функции в точке M_0 по направлению \vec{a} .

1. $z = \operatorname{arctg} \frac{y^2}{x}$, $M_0(1,1)$, $\vec{a} = \{2,1\}$;

2. $z = \sqrt{e^x + \sin y}$, $M_0(0, \frac{\pi}{6})$, $\vec{a} = \{3,4\}$;

3. $z = e^y \sin x$, $M_0(\frac{\pi}{2}, 1)$, $\vec{a} = \{1,-2\}$;

4. $z = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$, $M_0(2,-1)$, $\vec{a} = \{3,5\}$;

5. $z = x^2 + 2y^2 - 5$ в точке $M_0(2,-1)$, $\vec{a} = \{3,4\}$.

6. $z = x^2 + y^2x$, $M_0(1,2)$, по направлению $\vec{M_0M}$, $M(3,0)$.