Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное агентство по образованию
Южно-Уральский государственный университет
Кафедра «Математический анализ»

519.2(07)
К665

М.Е. Коржова, С.А. Шунайлова

Элементы теории вероятностей

Учебное пособие
для студентов
экономических специальностей

Челябинск
Издательство ЮУрГУ
2008

УДК 519.21(075.8)

Одобрено
учебно-методической комиссией
механико-математического факультета

Рецензенты:
Макаров А.С.
Никишин Ю.А.

Коржова, М.Е.
К665 **Элементы теории вероятностей.** Учебное пособие для студентов экономических специальностей / М.Е. Коржова, С.А. Шунайлова. – Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2008. – 58 с.

Учебное пособие предназначено для студентов экономических специальностей при изучении специального раздела математики «Теория вероятностей». Этот раздел является обязательным при изучении курса высшей математики.

По всем темам, содержащимся в пособии, приводятся необходимые теоретические сведения, примеры решения типовых задач с подробными комментариями. Также по каждой теме приведены задачи для самостоятельного решения.

ВВЕДЕНИЕ

Предметом теории вероятностей являются модели случайных экспериментов. При этом рассматриваются только такие эксперименты, которые можно воспроизводить при неизменном комплексе условий произвольное число раз (по крайней мере теоретически). Для реально воспроизводимого эксперимента понятие «наблюдаемый результат» означает, что существует принципиальная возможность зарегистрировать данный результат опыта, например, визуально. Любой наблюдаемый результат интерпретируется как случайное событие.

При достаточно большом количестве проведенных экспериментов проявляются определенные вероятностные закономерности. Теория вероятностей занимается установлением этих закономерностей.

Теория вероятностей служит для обоснования математической и прикладной статистики, которая в свою очередь используется при планировании и организации производства, при анализе технологических процессов и для других целей. Также методы теории вероятностей широко применяются в различных отраслях естествознания и техники: в теории надежности, теории массового обслуживания, в теоретической физике, геодезии, астрономии, теории стрельбы, теории ошибок наблюдений, теории автоматического управления, общей теории связи и во многих других теоретических и прикладных науках.

Все задачи, рассмотренные в учебном пособии, взяты из [1–3].

1. КОМБИНАТОРИКА

Пусть имеется n различных объектов произвольной природы (множество объектов). Выберем из них k объектов. Полученное подмножество называется *выборкой*.

Комбинаторика – это раздел математики, который изучает, сколькими способами можно осуществить такой выбор согласно заданным условиям.

Если объект A можно выбрать k_1 различными способами, а объект B – k_2 различными способами, то пару объектов A и B именно в таком порядке можно выбрать $k_1 \cdot k_2$ различными способами (правило умножения).

Если объект A можно выбрать k_1 различными способами, а объект B – k_2 различными способами, то выбрать один объект A или B можно $k_1 + k_2$ различными способами (правило сложения).

Размещением из n элементов по k называется любое подмножество, содержащее k элементов, взятых из данных n элементов с учетом порядка выбора. То есть подмножества различаются или элементами, входящими в них, или порядком, в котором расположены элементы.

Число всех возможных размещений по правилу умножения равно

$$A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}, \quad k = 0, \ldots, n.$$

Пример 1. Сколькими способами можно выбрать старосту и профорга из группы в 10 человек?

Р е ш е н и е. При выборе двух человек на должности старосты и профорга имеет значение порядок, в котором это делается. Значит, искомое число – это число размещений из 10 элементов по 2 элемента:

$$A_{10}^2 = \frac{10!}{(10-2)!} = \frac{10!}{8!} = 9 \cdot 10 = 90.$$

Перестановки – это размещения из n элементов по n элементов. Их количество равно $A_n^n = P_n = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1 = n!$.

Пример 2. На полке наудачу располагаются 10 книг. Сколько существует различных способов расположения 10-ти книг?

Р е ш е н и е. 10 книг образуют множество из $n = 10$ различных элементов, так как книги разные. Расположение книг на полке – это упорядочивание книг слева направо. Таким образом, расположение книг на полке – перестановка из 10-ти элементов. Поэтому число различных расположений 10-ти книг на полке совпадает с числом различных перестановок из 10-ти элементов и находится по формуле $P_{10} = 10! = 3628800$.

Пусть имеются k групп элементов, причем в первой группе n_1 неразличимых элементов, во второй группе n_2 неразличимых элементов, …, в k-ой группе – n_k неразличимых элементов. Элементы из разных групп различимы. Таким образом, имеем всего $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$ элементов. В этом случае имеют место *перестановки с повторениями*. Их число равно

$$P_n(n_1, n_2, ..., n_k) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot ... \cdot n_k!}.$$

Пример 3. На шести карточках написаны буквы, из которых можно составить слово АНАНАС. Сколько существует различных шестибуквенных слов, которые можно составить при помощи этих 6-ти карточек?

Решение. 6 карточек разобьем на 3 группы. Первая группа образована карточками с буквой А. Число таких карточек равно 3. Они неразличимы по буквам, на всех одна и та же буква А, $n_1 = 3$. Вторая группа образована двумя карточками, содержащими букву Н. Элементы второй группы также неразличимы между собой, $n_2 = 2$. Третья группа образована одной карточкой с буквой С, $n_3 = 1$. Таким образом, мы имеем дело с перестановками с повторениями и число слов из 6-ти букв равно:

$$P_6(3,\ 2,\ 1) = \frac{(3+2+1)!}{3!\,2!1!} = \frac{6!}{3!\,2!} = 60.$$

Сочетанием из *n* элементов по *k* называется любое подмножество, содержащее *k* элементов, взятых из данных *n* элементов без учета порядка выбора. То есть подмножества различаются только элементами, входящими в них, а порядок, в котором они расположены, не имеет значения.

Число различных сочетаний из *n* элементов по *k* можно найти по формуле:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad k = 0, ..., n.$$

Пример 4. В урне находятся 10 белых, 15 черных, 20 красных шаров. Из урны наудачу берут 9 шаров. Найти:

1) сколькими различными способами можно вынуть 9 шаров;

2) сколькими различными способами можно взять 9 шаров, среди которых 6 белых и 3 черных.

Решение. 1) Всего в урне 45 шаров. Считаем, что шары различимы, например, пронумерованы. Следовательно, имеем множество из $n = 45$ различных объектов. Наудачу взятые 9 шаров образуют подмножество из $k = 9$ элементов. Это подмножество определяется лишь элементами, попавшими в него, порядок не имеет значения. Следовательно, это сочетание из 45 элементов по 9:

$$C_{45}^9 = \frac{45!}{9!36!} = \frac{37 \cdot 38 \cdot 39 \cdot 40 \cdot 41 \cdot 42 \cdot 43 \cdot 44 \cdot 45}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9} = 886163135.$$

2) Взятие 9-ти шаров, из которых 6 белых и 3 черных, можно разбить на два действия: 1-е действие – возьмем 6 белых шаров из 10 белых шаров, находящихся в урне (это можно сделать C_{10}^6 различными способами); 2-е действие – возьмем 3 черных шара из общего числа 15 черных шаров (это можно сделать C_{15}^3 различ-

ными способами). Тогда число различных способов взятия 9-ти шаров нужного состава по правилу умножения равно

$$C_{10}^{6}\cdot C_{15}^{3}=\frac{10!}{6!\,4!}\cdot\frac{15!}{3!12!}=\frac{7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot\frac{13\cdot 14\cdot 15}{1\cdot 2\cdot 3}=95550.$$

Задачи

1. Сколькими способами 5 человек могут встать в очередь друг за другом?

2. Сколькими способами из группы спортсменов в 18 человек можно выбрать двоих участников соревнования?

3. Сколькими способами можно выбрать старосту и профорга в группе студентов из 24 человек?

4. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, если цифры в числе не повторяются?

5. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, если цифры в числе могут повторяться?

6. Сколько пятизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, если нечетные и четные цифры в числе чередуются и не повторяются?

7. Фотограф выстраивает в ряд трех мужчин и четырех женщин так, чтобы мужчины и женщины чередовались. Сколькими способами он может это сделать?

8. Студент сдает в сессию 3 экзамена. Сколько существует различных комбинаций оценок, которые он может получить?

9. Сколько различных вариантов распределения оценок за контрольную работу может быть для трех студентов, если возможны оценки "2", "3", "4","5"?

10. Сколькими способами можно купить набор из трех пирожных, если в продаже имеются 4 сорта пирожных, и сорта пирожных в наборе могут повторяться?

11. Сколько шестибуквенных слов можно составить из карточек, на которых написаны буквы З, Н, А, Н, И, Я?

12. Сколько шестибуквенных слов можно составить из карточек, на которых написаны буквы М, О, Л, О, К, О?

13. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, если каждая цифра входит в изображение числа только один раз?

2. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

2.1. Случайные события, действия над событиями

Пусть производится некоторая совокупность действий с неизвестным заранее результатом. Такая совокупность в теории вероятностей называется *экспериментом* (*опытом, испытанием*).

Случайное событие – это любой из возможных результатов эксперимента.

Событие, которое не может произойти ни при какой реализации эксперимента, называется *невозможным*. Событие, которое напротив происходит при любой реализации эксперимента, называется *достоверным*.

Событие, которое заключается в том, что A не произошло в результате эксперимента, называется *противоположным* событию A и обозначается $\overline{A}$. Справедлива формула $P(A)=1-P(\overline{A})$.

Суммой $A+B$ событий A и B называется событие, заключающееся в том, что произошло хотя бы одно из двух событий (A или B или оба).

Произведением AB событий A и B называется событие, состоящее в том, что произошли оба данных события одновременно (A *и* B).

Говорят, что событие A *влечёт событие* B $(A\subset B)$, если при наступлении события A событие B также обязательно наступит.

Пример 5. Подбрасывается игральный кубик. A – выпадение 6 очков, B – выпадение трёх очков, C – выпадение чётного числа очков, D – выпадение числа очков, кратного трём. Между этими событиями есть следующие соотношения:

$$A\subset D,\ B\subset D,\ A+B=D,\ CD=A.$$

Пример 6. Подбрасывается игральный кубик. Обозначим A_k – выпадение k очков $(k=1,2,3,4,5,6)$, A – выпадение чётного числа очков, B – выпадение нечётного числа очков, C – выпадение числа очков, кратного трём, D – выпадение числа очков, большего трёх. Выразить события A, B, C, D через A_k.

Решение. $A=A_2+A_4+A_6$, $B=A_1+A_3+A_5$, $C=A_3+A_6$, $D=A_4+A_5+A_6$.

Пример 7. Стрелок производит три выстрела по мишени. Обозначим A_k – попадание при выстреле №k $(k=1,2,3)$, A – хотя бы одно попадание, B – три попадания, C – три промаха, D – хотя бы один промах, E – не меньше двух попаданий, F – не более одного попадания, G – попадание после первого выстрела. Выразить события A, B, C, D, E, F, G через A_k.

Решение. $A=A_1+A_2+A_3=\overline{\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot\overline{A_3}}$, $B=A_1\cdot A_2\cdot A_3$, $C=\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot\overline{A_3}$,

$$D=\overline{A_1}+\overline{A_2}+\overline{A_3}=\overline{A_1\cdot A_2\cdot A_3},\ E=A_1\cdot A_2\cdot A_3+\overline{A_1}\cdot A_2\cdot A_3+A_1\cdot\overline{A_2}\cdot A_3+A_1\cdot A_2\cdot\overline{A_3},$$

$$F=\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot\overline{A_3}+\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot A_3+A_1\cdot\overline{A_2}\cdot\overline{A_3}+\overline{A_1}\cdot A_2\cdot\overline{A_3},\ F=\overline{A_1}\cdot A_2+\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot A_3.$$

2.2. Классическое определение вероятности. Теоремы сложения и умножения вероятностей.

Число, характеризующая степень возможности наступления данного события, называется его *вероятностью*.

Рассмотрим такие эксперименты, в которых модно выделить конечное число «простых» событий, которые являются *несовместными* (два таких исхода не могут произойти одновременно), *равновозможными* (по условиям эксперимента нет оснований считать, что какие-либо их них будут происходить чаще, чем другие) и образуют *полную группу* (кроме этих событий ничего другого произойти не может). Такие события назовем элементарными событиями (исходами, случаями).

Пусть n – число возможных исходов данного опыта, а m – число его исходов, при которых происходит событие A (назовем такие исходы благоприятными событию A). Тогда вероятность события A определяется как отношение числа благоприятных исходов к числу всех возможных исходов:

$$P(A)=\frac{m}{n}.$$

Пример 8. Набирая номер телефона, абонент забыл одну цифру и набрал ее наудачу. Найти вероятность того, что набрана нужная цифра.

Решение. Обозначим через A событие – набрана нужная цифра. Абонент мог набрать любую из 10 цифр, поэтому общее число возможных элементарных исходов равно 10. Эти исходы несовместны, равновозможны и образуют полную группу. Благоприятствует событию A лишь один исход (нужная цифра лишь одна). Искомая вероятность равна отношению числа исходов, благоприятствующих событию, к числу всех элементарных исходов:

$$P(A)=\frac{1}{10}.$$

Пример 9. В урне находятся 25 белых и 5 черных шаров. Из урны наудачу извлекаются 9 шаров. Найти вероятность того, что среди девяти извлеченных шаров имеется хотя бы один шар черного цвета.

Решение. Всего в урне 30 шаров. Будем считать, что все они пронумерованы. Эти 30 шаров разделяются на две группы. Первая группа состоит из 25-ти белых шаров, вторая группа состоит из 5-ти черных шаров. Эксперимент состоит в изъятии наудачу 9-ти шаров из 30-ти шаров (их порядок не имеет значения). Элементарным событием в этом эксперименте является любое сочетание из 30-ти элементов по 9. Тогда число таких элементарных событий равно:

$$n=C_{30}^{9}=\frac{30!}{9!\,21!}=\frac{22\cdot 23\cdot 24\cdot 25\cdot 26\cdot 27\cdot 28\cdot 29\cdot 30}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9}=14307150.$$

Событие A – среди девяти вынутых шаров имеется хотя бы один черный шар. Событие $\overline{A}$ означает, что нет ни одного черного шара среди вынутых или что все 9 шаров – белые.

$$m=C_{25}^{9}=\frac{25!}{9!16!}=\frac{17\cdot 18\cdot 19\cdot 20\cdot 21\cdot 22\cdot 23\cdot 24\cdot 25}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9}=2042975,\ P\left(\overline{A}\right)=\frac{C_{25}^{9}}{C_{30}^{9}}\approx 0{,}14.$$

Поэтому $P(A)=1-P\left(\overline{A}\right)\approx 1-0{,}14=0{,}86.$

Пример 10. В лотерее 2000 билетов. На один билет падает выигрыш 100 руб., на четыре билета – выигрыш по 50 руб., на десять билетов – выигрыш по 20 руб., на двадцать билетов – выигрыш по 10 руб., на 165 билетов – выигрыш по 5 руб., на 400 билетов – выигрыш по 1 руб. Остальные билеты невыигрышные. Какова вероятность выиграть по билету не менее 10 руб.?

Р е ш е н и е. Здесь $m = 1 + 4 + 10 + 20 = 35$, $n = 2000$, т.е.

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{35}{2000}=0,0175.$$

Вероятность суммы двух событий можно найти по *теореме сложения вероятностей:* $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

Если события A и B *несовместны*, то есть не могут произойти одновременно, то вероятность их произведения равна нулю, и теорема сложения приобретает более простой вид: $P(A+B)=P(A)+P(B)$.

Вероятность произведения событий определяется по *теореме умножения вероятностей:* $P(AB)=P(A)P_A(B)$, где $P_A(B)$ – так называемая *условная вероятность* события B, то есть вероятность B при условии, что A произошло.

Если осуществление события A не изменяет вероятности события B, то A и B называются *независимыми*, и вероятность их произведения равна произведению вероятностей сомножителей: $P(AB)=P(A)P(B)$.

Пример 11. Два стрелка стреляют по одной мишени. Вероятности попадания в мишень при одном выстреле для стрелков соответственно равны $p_1 = 0,7$ и $p_2 = 0,8$. Найти вероятность того, что при одном залпе в мишени будет: а) одно попадание; б) не менее одного попадания.

Р е ш е н и е. а) Случайные события: A – в мишени одно попадание, B – в мишени не менее одного попадания. Введём случайные события: C_1 – в мишень попал первый стрелок, C_2 – в мишень попал второй стрелок. Тогда:

$$A=C_1\overline{C_2}+\overline{C_1}C_2,\; B=C_1\overline{C_2}+\overline{C_1}C_2+C_1C_2.$$

В обеих формулах случайные события-слагаемые несовместны, а случайные события-сомножители независимы, так как вероятность попадания в мишень каждого из стрелков не зависит от результата другого стрелка. Поэтому

$$P(A)=P\left(C_1\overline{C_2}\right)+P\left(\overline{C_1}C_2\right)=P(C_1)\cdot P\left(\overline{C_2}\right)+P\left(\overline{C_1}\right)\cdot P(C_2)=0,7\cdot 0,2+0,3\cdot 0,8=0,38.$$

$$P(B)=P(C_1)\cdot P\left(\overline{C_2}\right)+P\left(\overline{C_1}\right)\cdot P(C_2)+P(C_1)\cdot P(C_2)=$$
$$=0,7\cdot 0,2+0,3\cdot 0,8+0,7\cdot 0,8=0,94.$$

б) Вероятность события B можно определить также, вычислив сначала вероятность противоположного события $\overline{B}$. Т.к. $\overline{B}=\overline{C_1}\cdot\overline{C_2}$, то

$P\left(\overline{B}\right)=P\left(\overline{C_1}\right)\cdot P\left(\overline{C_2}\right)=\ 0,3\cdot 0,2=0,06$. Тогда $P(B)=1-0,06=0,94$.

Вероятность произведения трех событий равна

$$P(ABC)=P(A)\cdot P_A(B)\cdot P_{AB}(C).$$

Пример 12. В библиотеке на стеллаже в случайном порядке расставлены десять учебников по экономике и пять – по математике. Библиотекарь наудачу берет три учебника. Найти вероятность того, что: а) все три учебника по математике; б) хотя бы один из взятых учебников будет по математике.

Р е ш е н и е. Введем события A – все три учебника по математике, B – ровно один учебник по математике, C – хотя бы один из взятых учебников будет по математике, A_k – учебник № k по математике $(k=1, 2, 3)$. Тогда $A = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$, $\overline{B} = \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3}$.

События A_1, A_2, A_3 зависимы. Значит вероятность события равна

$$P(A) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1A_2}(A_3) = \frac{5}{15}\cdot\frac{4}{14}\cdot\frac{3}{13} = \frac{2}{91}.$$

$$P(B) = P\left(\overline{A_1}\right)P_{\overline{A_1}}\left(\overline{A_2}\right)P_{\overline{A_1}\,\overline{A_2}}\left(\overline{A_3}\right) = \frac{10}{15}\cdot\frac{9}{14}\cdot\frac{8}{13} = \frac{24}{91}.$$

Тогда $P(B) = 1 - P\left(\overline{B}\right) = 1 - \frac{24}{91} = \frac{67}{91}$.

Пример 13. Абонент забыл последнюю цифру номера телефона и набирает её наудачу. Определить вероятность того, что он наберёт нужный номер не более, чем за три попытки.

Р е ш е н и е. Случайное событие A – абонент дозвонился не более, чем за три попытки набора номера. Пусть случайное событие A_i – абонент дозвонился при i-том наборе номера (i = 1, 2, 3).

Вероятность события A можно найти, вычислив сначала вероятность противоположного события $\overline{A}$ и, используя формулу $P(A) = 1 - P\left(\overline{A}\right)$.

Случайное событие $\overline{A}$ – абонент не дозвонился за три набора номера – есть произведение трёх событий: $\overline{A} = \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3}$, поэтому

$$P\left(\overline{A}\right) = P\left(\overline{A_1}\right)P_{\overline{A_1}}\left(\overline{A_2}\right)P_{\overline{A_1}\,\overline{A_2}}\left(\overline{A_3}\right) = \frac{9}{10}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{7}{8} = \frac{7}{10} = 0,7.$$

Но тогда $P(A) = 1 - P\left(\overline{A}\right) = 1 - 0,7 = 0,3$.

Пример 14. Брошены две игральные кости. Найти вероятность того, что сумма очков на выпавших гранях – четная, причем на грани хоты бы одной из костей появится шестерка.

Р е ш е н и е. На выпавшей грани «первой» игральной кости может появиться одно очко, два очка, …, шесть очков. Аналогичные шесть элементарных исходов возможны при бросании «второй» кости. Каждый из исходов бросания «первой» кости может сочетаться с каждым из исходов бросания «второй» кости. Таким образом, общее число возможных элементарных исходов испытания равно $6 \cdot 6 = 36$. Эти исходы образуют полную группу и в силу симметрии костей равновозможны.

Благоприятствующими интересующему нас событию (хоты бы на одной грани появится шестерка, сумма выпавших очков – четная) являются следующие пять исходов (первым записано число очков, выпавших на «первой» кости, вторым – число очков, выпавших на «второй» кости; далее найдена сумма очков):

$$1)\ 6,\ 2;\ 6+2=8;\ \ 2)\ 6,\ 4;\ 6+4=10;\ \ 3)\ 6,\ 6;\ 6+6=12;$$
$$4)\ 2,\ 6;\ 2+6=8;\ \ 5)\ 4,\ 6;\ 4+6=10.$$

Искомая вероятность равна отношению числа исходов, благоприятствующих событию, к числу всех возможных элементарных исходов:

$$P=\frac{5}{36}.$$

Пример 15. Найти вероятность того, что при бросании трех игральных костей шестерка выпадет на одной (безразлично какой) кости, если на гранях двух других костей выпадут числа очков, не совпадающие между собой и не равные шести.

Решение. Общее число элементарных исходов испытания равно числу сочетаний из шести элементов по три: C_6^3.

Число исходов, благоприятствующих появлению шестерки на одной грани и различного числа очков (не равного шести) на гранях двух других костей, равно числу сочетаний из пяти элементов по два: C_5^2.

Искомая вероятность равна отношению числа исходов, благоприятствующих интересующему нас событию, к общему числу возможных элементарных исходов:

$$P=\frac{C_5^2}{C_6^3}=\frac{5!}{2!\cdot 3!}:\frac{6!}{3!\cdot 3!}=\frac{2\cdot 5}{4\cdot 5}=\frac{1}{2}.$$

Задачи

14. Игральный кубик бросают дважды. Найти вероятность того, что сумма выпавших очков не превосходит четырех.

15. На десяти карточках написаны буквы А, А, А, М, М, Т, Т, Е, И, К. После перемешивания вынимают наугад одну карточку за другой и раскладывают их в том порядке, в каком они были вынуты. Найти вероятность того, что на карточках будет написано слово «МАТЕМАТИКА».

16. Какова вероятность того, что четырехзначный номер случайно взятого автомобиля имеет все цифры различные.

17. Шестизначный номер троллейбусного или автобусного билета считается «счастливым», если сумма первых его трех цифр совпадает с суммой последних трех цифр. Найти вероятность получения «счастливого» билета.

18. Из колоды карт (52 карты) наугад вынимают 3 карты. Найти вероятность того, что это будет тройка, семерка, туз.

19. Найти вероятность того, что в группе из 25 студентов найдутся по меньшей мере два, которые имеют общий день рождения.

20. Когда Костя Сидоров, ученик 6 класса, наконец-то обнаружил в буфете кулек с конфетами, он услышал, как отворилась входная дверь. Это пришла из магазина бабушка Пелагея Марковна. Времени на выбор не было, и Костя, запустив

руку в кулек, едва успел переместить к себе в карман две конфеты. Какова вероятность того, что ему достался хотя бы один «Мишка на Севере», если в кульке было 7 конфет с помадкой, 5 соевых батончиков и 3 «Мишка на Севере»?

21. В самом тихом районе Чикаго за неделю совершается 7 ограблений. Найти вероятность того, что хотя бы один день в неделю полиция будет отдыхать, если все возможные распределения числа ограблений по дням недели равновероятны?

22. В ящике комода лежат 10 носков черного цвета и 6 носков в зеленую полосочку. Наудачу вынимается 3 носка. Найти вероятность того, что образовалась пара.

23. Куб, все грани которого окрашены, распилен на 64 одинаковых кубика. Какова вероятность, что у случайно выбранного кубика есть окрашенная грань?

24. Куб, все грани которого окрашены, распилен на 64 одинаковых кубика. Какова вероятность, что у случайно выбранного кубика ровно две окрашенные грани?

25. Какова вероятность, что при двух бросаниях игральной кости в сумме выпадет не менее 3 очков?

26. Трое мужчин и четыре женщины случайным образом выстраиваются в ряд для фотографирования. Какова вероятность, что мужчины и женщины будут чередоваться?

27. В коробке шесть одинаковых, занумерованных кубиков. Наудачу по одному извлекают все кубики. Найти вероятность того, что номера извлеченных кубиков появятся в возрастающем порядке.

28. В урне лежат 4 белых и 3 черных шара. Наугад вынимают 2 шара. Какова вероятность, что они разного цвета?

29. В урне лежат 4 белых и 3 черных шара. Наугад вынимают 2 шара. Какова вероятность, что они белые?

30. В урне лежат 4 белых и 3 черных шара. Наугад вынимают 2 шара. Какова вероятность, что они черные?

31. В урне лежат 5 белых и 3 черных шара. Наугад вынимают 2 шара. Какова вероятность, что они разных цветов?

32. Студент из 30 вопросов к экзамену усвоил 24. Какова вероятность, что он знает оба из доставшихся ему вопросов?

33. В группе из 5 юношей и 3 девушек по жребию разыгрываются 2 билета в кино. Какова вероятность, что билеты достанутся юноше и девушке?

34. Из колоды в 36 карты случайным образом выбраны 3 карты. Какова вероятность, что они пиковой масти?

35. Из колоды в 36 карт случайным образом выбраны 3 карты. Какова вероятность того, что это тузы?

36. В партии из 50 изделий 5 бракованных. Из партии выбирается наугад шесть изделий. Определить вероятность того, что среди этих шести изделий два окажутся бракованными.

37. В группе 12 студентов, среди которых 8 отличников. По списку наудачу отобрано 9 студентов. Найти вероятность того, что среди отобранных студентов пять отличников.

38. Из трёх переводчиков, пяти деканов и шести научных сотрудников необходимо сформировать делегацию из 7 человек. Какова вероятность того, что в делегацию войдут все научные сотрудники и один переводчик?

39. Группа туристов из 15 юношей и 5 девушек выбирает по жребию хозяйственную команду в составе 3 человек. Событие A – в команде оказалось менее двух девушек, событие B – в команде только девушки, событие C – в команде только юноши. Есть ли среди этих событий попарно совместные? Вычислите $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$, $P(A+B)$.

40. Два стрелка одновременно стреляют по мишени. Вероятности попадания для них равны соответственно 0,4 и 0,5. Какова вероятность: а) ровно одного попадания; б) хотя бы одного попадания?

41. Имеется два ящика, в каждом по 10 деталей; в первом ящике 8, во втором 7 стандартных деталей. Из каждого ящика наугад вынимают по одной детали. Какова вероятность того, что они обе стандартные?

42. Имеется два ящика, в каждом из которых по 10 деталей; в первом ящике 8, во втором 7 стандартных деталей. Из первого ящика наугад вынимают две детали, из второго – одну деталь. Какова вероятность того, что ровно две из трёх деталей стандартные?

43. Слово «ананас» составлено из букв разрезной азбуки. Карточки с буквами перемешивают, из них случайным образом берут по очереди 3 карточки и выкладывают в ряд. Какова вероятность того, что из них образуется слово «сан»?

44. Из карточек с буквами составлено слово «колокол». Карточки перемешиваются, из них случайным образом отбирают 4 и выкладываются в ряд. Какова вероятность того, что они образуют слово «клок»?

45. В урне 3 белых и 5 черных шаров. По очереди вынимают 2 шара без возвращения. Какова вероятность того, что первый шар белый, а второй черный?

46. Какова вероятность того, что наудачу выбранное натуральное число делится на 3 или на 5?

47. Жюри состоит из трёх судей. Первый и второй судьи принимают правильное решение независимо друг от друга с вероятностью 0,9, а третий судья для принятия решения бросает монетку. Окончательное решение жюри принимает по большинству голосов. Какова вероятность того, что жюри примет правильное решение?

48. Двадцать экзаменационных билетов содержат по два неповторяющихся вопроса. Экзаменуемый знает ответы на 35 вопросов. Найти вероятность того, что экзамен будет сдан, если для этого достаточно ответить на два вопроса одного билета или на один вопрос билета и на один дополнительный вопрос из другого билета.

49. Имеется 10 ключей, из которых только один подходит к двери. Ключи пробуют подряд. Какова вероятность того, что годный ключ попадёт на четвёртом шаге?

50. В коробке пять одинаковых изделий, причем три из них окрашены. Наудачу извлечены два изделия. Найти вероятность того, что среди двух извлеченных изделий окажутся: а) одно окрашенное изделие; б) два окрашенных изделия; в) хотя бы одно окрашенное изделие.

51. В одном ящике 5 белых и 10 красных шаров, в другом ящике 10 белых и 5 красных шаров. Найти вероятность того, что хотя бы из одного ящика будет вынут один белый шар, если из каждого ящика вынуто по одному шару.

52. На полке в библиотеке в случайном порядке расставлены 15 учебников, причем пять из них в переплете. Библиотекарь берет три учебника. Найти вероятность того, что хотя бы один из взятых учебников окажется в переплете.

53. Для сигнализации об аварии установлены два независимо работающих сигнализатора. Вероятность того, что при аварии сигнализатор сработает, равна 0,95 для первого сигнализатора и 0,9 для второго. Найти вероятность того, что при аварии сработает только один сигнализатор.

54. Среди 100 лотерейных билетов есть 5 выигрышных. Найти вероятность того, что два наудачу выбранные билета окажутся выигрышными.

55. Отдел контроля проверяет изделия на стандартность. Вероятность того, что изделие стандартно, равна 0,9. Найти вероятность того, что из двух проверенных изделий только одно стандартное.

56. Из партии изделий товаровед отбирает изделия высшего сорта. Вероятность того, что наудачу взятое изделие окажется высшего сорта, равна 0,8. Найти вероятность того, что из трех проверенных изделий только два изделия высшего сорта.

57. Вероятность выхода изделия из строя при эксплуатации сроком до одного года равна 0,13, а при эксплуатации сроком до 3 лет – 0,36. Найти вероятность выхода изделия из строя при эксплуатации сроком от 1 года до 3 лет.

58. Работа электронного устройства прекратилась вследствие выхода из строя одного из пяти унифицированных блоков. Производится последовательная замена каждого блока новым до тех пор, пока устройство не начнет работать. Какова вероятность того, что придется заменить: а) 2 блока; б) 4 блока?

59. В урне 30 шаров: 10 красных, 5 синих и 15 белых. Найти вероятность появления цветного шара.

60. Стрелок стреляет по мишени, разделенной на 3 области. Вероятность попадания в первую область равна 0,45, во вторую – 0,35. Найти вероятность того, что стрелок при одном выстреле попадет либо в первую, либо во вторую область.

61. Консультационный пункт института получает пакеты с контрольными работами из городов А, В и С. Вероятность получения пакета из города А равна 0,7, из города В – 0,2. Найти вероятность того, что очередной пакет будет получен из города С.

62. Вероятность того, что в сентябре день будет дождливым, равна $p = 0,7$. Найти вероятность того, что из двух случайно взятых дней ровно один день будет ясным.

63. В ящике имеется n деталей, из которых m стандартных. Найти вероятность того, что среди k наудачу извлеченных деталей есть хотя бы одна стандартная.

64. У сборщика имеется 3 конусных и 7 эллиптических валиков. Сборщик взял один валик, а затем второй. Найти вероятность того, что первый из взятых валиков – конусный, а второй – эллиптический.

65. В урне 5 белых, 4 черных и 3 синих шара. Каждое испытание состоит в том, что наудачу извлекают один шар, не возвращая его обратно. Найти вероятность того, что при первом испытании появится белый шар (событие A), при втором – черный (событие B) и при третьем – синий (событие C).

66. Найти вероятность совместного поражения цели двумя орудиями, если вероятность поражения цели первым орудием (событие A) равна 0,8, а вторым (событие B) – 0,7.

67. Найти вероятность совместного появления герба при одном бросании двух монет.

68. Имеется 3 ящика, содержащих по 10 деталей. В первом ящике 8, во втором ящике 7 и в третьем 9 стандартных деталей. Из каждого ящика наудачу вынимают по одной детали. Найти вероятность того, что все три вынутые детали окажутся стандартными.

69. Вероятности появления каждого из трех независимых событий A_1, A_2, A_3 соответственно равны p_1, p_2, p_3. Найти вероятность появления только одного из этих событий.

70. Вероятности попадания в цель при стрельбе из трех орудий составляют $p_1 = 0,8$, $p_2 = 0,7$, $p_3 = 0,9$. Найти вероятность хотя бы одного попадания при одном залпе из всех орудий.

71. В типографии имеется 4 плоскопечатных машины. Для каждой машины вероятность того, что она работает в данный момент, равна 0,9. Найти вероятность того, что в данный момент работает хотя бы одна машина.

72. Вероятность того, что при одном выстреле стрелок попадает в цель, равна 0,4. Сколько выстрелов должен произвести стрелок, чтобы с вероятностью не менее 0,9 он попал в цель хотя бы один раз?

73. На 100 лотерейных билетов приходится 5 выигрышных. Какова вероятность выигрыша хотя бы по одному билету, если приобретено: а) 2 билета; б) 4 билета?

74. Вероятность того, что студент сдаст первый экзамен, равна 0,9; второй – 0,9; третий – 0,8. Найти вероятность того, что студентом будут сданы: а) только второй экзамен; б) только один экзамен; в) три экзамена; г) по крайней мере два экзамена; д) хотя бы один экзамен.

75. Экзаменационный билет для письменного экзамена состоит из 10 вопросов – по 2 вопроса из 20 по каждой из пяти тем, представленных в билете. По каждой теме студент подготовил лишь половину всех вопросов. Какова вероятность того, что студент сдаст экзамен, если для этого необходимо ответить хотя бы на один вопрос по каждой из пяти тем в билете?

2.3. Формула полной вероятности. Формула Байеса

События образуют *полную группу*, если хотя бы одно из них обязательно произойдет в результате эксперимента.

Предположим, что событие *A* может наступить только вместе с одним из нескольких попарно несовместных событий $H_1, H_2, ..., H_n$, образующих полную группу. Будем называть события H_i ($i = 1, 2, \dots, n$) *гипотезами*. Вероятность появления события А определяется по формуле полной вероятности:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P_{H_i}(A) = P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(A) + ... + P(H_n) \cdot P_{H_n}(A).$$

Пример 16. Имеются три урны. В первой урне находятся 5 белых и 3 чёрных шара, во второй – 4 белых и 4 чёрных шара, а в третьей – 8 белых шаров. Наугад выбирается одна из урн (это может означать, например, что осуществляется выбор из вспомогательной урны, где находятся три шара с номерами 1, 2 и 3). Из этой урны наудачу извлекается шар. Какова вероятность того, что он окажется чёрным?

Р е ш е н и е. Событие *A* – извлечён чёрный шар. Если было бы известно, из какой урны извлекается шар, то искомую вероятность можно было бы вычислить по классическому определению вероятности. Введем предположения (гипотезы) относительно того, какая урна выбрана для извлечения шара.

Шар может быть извлечён или из первой урны (гипотеза H_1), или из второй (гипотеза H_2), или из третьей (гипотеза H_3). Так как имеются одинаковые шансы выбрать любую из урн, то $P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \dfrac{1}{3}$. Далее находим вероятности события *A* при каждой из гипотез:

$$P_{H_1}(A)=\frac{3}{8},\ P_{H_2}(A)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2},\ P_{H_3}(A)=\frac{0}{8}=0.$$

Отсюда следует, что

$$P(A)=P(H_1)\cdot P_{H_1}(A)+P(H_2)\cdot P_{H_2}(A)+P(H_3)\cdot P_{H_3}(A)=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{8}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot 0=\frac{1}{8}+\frac{1}{6}=\frac{7}{24}.$$

Пример 17. Электролампы изготавливаются на трёх заводах. Первый завод производит 30% общего количества электроламп, второй – 25%, а третий – остальную часть. Продукция первого завода содержит 1% бракованных электроламп, второго – 1,5%, третьего – 2%. В магазин поступает продукция всех трёх заводов. Какова вероятность того, что купленная в магазине лампа оказалась бракованной?

Решение. Предположения необходимо ввести относительно того, на каком заводе была изготовлена электролампа. Зная это, мы сможем найти вероятность того, что она бракованная.

Введём обозначения для событий: A – купленная электролампа оказалась бракованной, H_1 – лампа изготовлена первом заводом, H_2 – лампа изготовлена вторым заводом, H_3 – лампа изготовлена третьим заводом. Имеем: $P(H_1)=0{,}30$, $P(H_2)=0{,}25$, $P(H_3)=0{,}45$, $P_{H_1}(A)=0{,}01$, $P_{H_2}(A)=0{,}015$, $P_{H_3}(A)=0{,}02$. Искомую вероятность находим по формуле полной вероятности.

$$P(A)=P(H_1)\cdot P_{H_1}(A)+P(H_2)\cdot P_{H_2}(A)+P(H_3)\cdot P_{H_3}(A)=$$

$$=0{,}30\cdot 0{,}01+0{,}25\cdot 0{,}015+0{,}45\cdot 0{,}02=0{,}003+0{,}00375+0{,}009=0{,}01575.$$

Пусть $H_1, H_2, ..., H_n$ – полная группа попарно несовместных событий (гипотезы). A – случайное событие. Тогда

$$P_A(H_i)=\frac{P(H_i)P_{H_i}(A)}{P(A)},\ i=1,\ 2,\ ...,\ n.$$

Последнюю формулу, позволяющей переоценить вероятности гипотез после того, как становится известным результат испытания, в итоге которого появилось событие А, называют *формулой Байеса*.

Пример 18. В специализированную больницу поступают в среднем 50% больных с заболеванием *K*, 30% – с заболеванием *L*, 20% – с заболеванием *M*. Вероятность полного излечения болезни *K* равна 0,7 для болезней *L* и *M* эти вероятности соответственно равны 0,8 и 0,9. Больной, поступивший в больницу, был выписан здоровым. Найти вероятность того, что этот больной страдал заболеванием *K*.

Решение. Введем гипотезы: H_1 – больной страдал заболеванием *K*, H_2 – больной страдал заболеванием *L*, H_3 – больной страдал заболеванием *M*. Тогда по условию задачи имеем $P(H_1)=0{,}5$, $P(H_2)=0{,}3$, $P(H_3)=0{,}2$.

Введем событие A – больной, поступивший в больницу, был выписан здоровым. По условию $P_A(H_1)=0{,}7$, $P_A(H_2)=0{,}8$, $P_A(H_3)=0{,}9$.

По формуле полной вероятности получаем:

$$P(A)=P(H_1)\cdot P_{H_1}(A)+P(H_2)\cdot P_{H_2}(A)+P(H_3)\cdot P_{H_3}(A)=$$
$$=0,5\cdot 0,7+0,3\cdot 0,8+0,2\cdot 0,9=0,77.$$

В задаче требуется вычислить вероятность $P_A(H_1)$.

По формуле Байеса $P_A(H_1)=\dfrac{P(H_1)P_{H_1}(A)}{P(A)}=\dfrac{0,5\cdot 0,7}{0,77}=\dfrac{5}{11}\approx 0,45$.

Пример 19. Пусть в урне пять шаров и все предположения о количестве белых шаров равновозможные. Из урны наудачу взят шар, он оказался белым. Какое предположение о начальном составе урны наиболее вероятно?

Р е ш е н и е . Пусть H_i – гипотеза, состоящая в том, что в урне i белых шаров ($i=0,1,2,3,4,5$), т.е. возможно сделать шесть предположений. Тогда по условию задачи имеем $P(H_0)=P(H_1)=P(H_2)=P(H_3)=P(H_4)=P(H_5)=\dfrac{1}{6}$.

Введем событие A – наудачу взятый шар белый. Вычислим $P_A(H_i)$. Так как $P_{H_i}(A)=\dfrac{i}{5}$, то по формуле Байеса имеем:

$$P_A(H_i)=\frac{\frac{1}{6}\cdot\frac{i}{5}}{\sum\limits_{k=0}^{5}\frac{1}{6}\cdot\frac{k}{5}}=\frac{i}{15}.$$

Таким образом, наиболее вероятной является гипотеза H_5, т.к. $P_A(H_5)=\dfrac{1}{3}$.

Пример 20. Два из трех независимо работающих элементов вычислительного устройства отказали. Найти вероятность того, что отказали первый и второй элементы, если вероятности отказа первого, второго и третьего элементов соответственно равны 0,2; 0,4 и 0,3.

Р е ш е н и е . Обозначим через A событие – отказали два элемента. Можно сделать следующие гипотезы:

H_1 – отказали первый и второй элементы, а третий элемент исправен. Поскольку элементы работают независимо, применима теорема умножения:

$$P(H_1)=p_1\cdot p_2\cdot q_3=0,2\cdot 0,4\cdot 0,7=0,056;$$

H_2 – отказали первый и третий элементы, а второй элемент исправен. Тогда:

$$P(H_2)=p_1\cdot q_2\cdot p_3=0,2\cdot 0,6\cdot 0,3=0,036;$$

H_3 – отказали второй и третий элементы, а первый элемент исправен, причем:

$$P(H_3)=q_1\cdot p_2\cdot p_3=0,8\cdot 0,4\cdot 0,3=0,096;$$

H_4 – отказал только один элемент; H_5 – отказали все три элемента; H_6 – ни один из элементов не отказал.

Вероятности последних трех гипотез не вычислены, так как при этих гипотезах событие A (отказали два элемента) невозможно и значит условные вероятности $P_{H_4}(A)$, $P_{H_5}(A)$ и $P_{H_6}(A)$ равны нулю, следовательно, равны нулю и произведения $P(H_4)\cdot P_{H_4}(A)$, $P(H_5)\cdot P_{H_5}(A)$, $P(H_6)\cdot P_{H_6}(A)$ при любых значениях вероятностей гипотез H_4, H_5, H_6.

Поскольку при гипотезах H_1, H_2, H_3 событие A достоверно, то соответствующие условные вероятности равны единице:

$$P_{H_1}(A)=P_{H_2}(A)=P_{H_3}(A)=1.$$

По формуле полной вероятности, вероятность того, что отказали два элемента:

$$P(A)=P(H_1)\cdot P_{H_1}(A)+P(H_2)\cdot P_{H_2}(A)+P(H_3)\cdot P_{H_3}(A)+P(H_4)\cdot P_{H_4}(A)+$$
$$+P(H_5)\cdot P_{H_5}(A)+P(H_6)\cdot P_{H_6}(A)=0,056\cdot 1+0,036\cdot 1+0,096\cdot 1=0,188.$$

По формуле Байеса, искомая вероятность того, что отказали первый и второй элементы:

$$P_A(H_1)=\frac{P(H_1)\cdot P_{H_1}(A)}{P(A)}=\frac{0,056}{0,188}=0,3.$$

Задачи

76. Пятнадцать экзаменационных билетов содержат по 2 вопроса, которые не повторяются. Экзаменуемый может ответить только на 25 вопросов. Определить вероятность того, что экзамен будет сдан, если для этого достаточно ответить на 2 вопроса из одного билета или на 1 вопрос из первого билета и на указанный дополнительный вопрос из другого билета.

77. В группе 10 студентов. Трое подготовились к экзамену на оценку «отлично», четверо на «хорошо», двое на «удовлетворительно», один на «неудовлетворительно». В экзаменационных билетах 20 вопросов. Отличник знает ответ на все вопросы, хороший студент – на 16 вопросов, посредственный – на 10, плохой – на 5. Вызванный студент ответил на все три вопроса. Найти вероятность того, что он: а) отличник; б) плохой студент.

78. Вероятность того, что во время работы ЭВМ произойдет сбой в процессоре, в памяти, в остальных устройствах, относятся как 3:2:5. Вероятности обнаружения сбоя в процессоре, в памяти и в остальных устройствах соответственно равны 0,8; 0,9; 0,9. Найти вероятность того, что возникший в ЭВМ сбой будет обнаружен.

79. На наблюдательной станции установлены 4 радиолокатора различных конструкций. Вероятность обнаружения целей с помощью первого локатора равна 0,86, второго – 0,9, третьего – 0,92, четвертого – 0,95. Наблюдатель наугад включает один из локаторов. Какова вероятность обнаружения цели?

80. Трое сотрудников фирмы выдают соответственно 30%, 50% и 20% всех изделий, производимых фирмой. У первого брак составляет 2%, у второго – 5%, у третьего – 1%. Найти вероятность того, что: а) случайно выбранное изделие

фирмы дефектно; б) случайно выбранное дефектное изделие сделано соответственно первым, вторым и третьим сотрудником фирмы.

81. Прибор может принадлежать к одной из трех партий с вероятностями p_1, p_2, p_3, где $p_1 = p_3 = 0{,}25$, $p_2 = 0{,}5$. Вероятности того, что прибор будет работать заданное число часов, равны для этих партий соответственно 0,1, 0,2 и 0,4. Определить вероятность того, что этот прибор проработает заданное число часов.

82. На технический контроль качества предъявляется партия из 1000 деталей, в которой 200 деталей изготовлено на заводе A, 300 деталей – на заводе B, остальные – на заводе C. Доля брака зависит от завода-изготовителя и составляет для завода A и B 15%, а для завода C – 30%. Найти вероятность того, что наудачу извлеченная деталь окажется отличного качества.

83. В магазин поступили партии обуви с двух фабрик: 30 % – с первой и 70 % – со второй. В продукции первой фабрики 30 % обуви черного цвета, в продукции второй – 80 %. Какова вероятность того, что наугад взятая пара обуви окажется черного цвета?

84. В понедельник, после двух выходных, токарь Григорий вытачивает левовинтовые шурупы вместо обычных правовинтовых с вероятностью 0,5. Во вторник это показатель снижается до среднецехового – 0,2. В остальные дни недели Григорий ударно трудится и процент брака среди изготавливаемых им шурупов составляет 10%. При проверке недельной партии шурупов, выточенных Григорием, случайно выбранный шуруп оказался дефектным. Какова вероятность того, что шуруп изготовлен в понедельник.

85. В первой коробке 3 белых и 4 черных шара, во второй – 5 белых и 2 черных. Из первой коробки во вторую случайным образом переложили один шар, перемешали и извлекли шар из второй коробки. Какова вероятность того, что он белый?

86. В группе спортсменов 20 лыжников и 8 бегунов. Вероятность выполнить квалификационную норму для лыжника равна 0,8, для бегуна – 0,7. Спортсмен выполнил норму. Какова вероятность того, что он лыжник?

87. Из 50 деталей 18 изготовлены в первом цехе, 20 – во втором, остальные – в третьем. Первый и третий цеха дают продукцию отличного качества с вероятностью 0,9, второй – с вероятностью 0,6. Взятая деталь оказалась отличного качества. Какова вероятность того, что деталь изготовлена во втором цехе?

88. Имеются 2 одинаковых ящика с шарами. В первом ящике 2 белых и 1 черный шар, во втором – 1 белый и 4 черных шара. Наудачу выбирают один ящик и вынимают из него 1 шар. Какова вероятность, что вынутый шар окажется белым?

89. В коробку, содержащую два шара, опущен белый шар, после этого из нее наудачу извлечен один шар. Найти вероятность того, что извлеченный шар ока-

жется белым, если равновозможны все предположения о первоначальном составе шаров.

90. В первой коробке 3 белых и 4 черных шара, во второй – 5 белых и 2 черных. Из первой коробки во вторую случайным образом переложили один шар, перемешали и извлекли шар из второй коробки. Какова вероятность того, что он белый?

91. В группе спортсменов 20 лыжников и 8 бегунов. Вероятность выполнить квалификационную норму для лыжника равна 0,8, для бегуна – 0,7. Спортсмен выполнил норму. Какова вероятность того, что он лыжник?

92. Из 50 деталей 18 изготовлены в первом цехе, 20 – во втором, остальные – в третьем. Первый и третий цеха дают продукцию отличного качества с вероятностью 0,9, второй – с вероятностью 0,6. Взятая деталь оказалась отличного качества. Какова вероятность того, что деталь изготовлена во втором цехе?

93. Имеются 2 одинаковых ящика с шарами. В первом ящике 2 белых и 1 черный шар, во втором – 1 белый и 4 черных шара. Наудачу выбирают один ящик и вынимают из него 1 шар. Какова вероятность, что вынутый шар окажется белым?

94. В пирамиде пять винтовок, три из которых снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с оптическим прицелом, равна 0,95; для винтовки без оптического прицела эта вероятность равна 0,7. Найти вероятность того, что мишень будет поражена, если стрелок произведет один выстрел из наудачу взятой винтовки.

95. Группа студентов состоит из трёх отличников, пяти хорошо успевающих и восьми занимающихся слабо. Отличники на предстоящем экзамене могут получить только отличные оценки. Хорошо успевающие студенты могут получить с равной вероятностью хорошие и отличные оценки. Слабо занимающиеся могут получить с равной вероятностью хорошие, удовлетворительные и неудовлетворительные оценки. Для сдачи экзамена вызывается наугад один студент. Найти вероятность события A – студент получит хорошую или отличную оценку.

96. Имеются 3 ящика: в первом 5 белых шаров и 6 черных; во втором 4 белых шара и 5 черных; в третьем 7 белых шаров (черных нет). Некто выбирает наугад один ящик и вынимает из нее шар. Этот шар оказался белым. Найти вероятность того, что: а) этот шар вынут из первого ящика; б) этот шар вынут из второго ящика; в) этот шар вынут из третьего ящика.

97. У рыбака имеется три излюбленных места для ловли рыбы, которые он посещает с равной вероятностью каждое. Если он закидывает удочку в первом месте, рыба клюет с вероятностью 0,6; во втором месте – с вероятностью 0,9; в третьем – с вероятностью 0,7. Рыбак, выйдя на ловлю рыбы, закинул удочку, и рыба клюнула. Найти вероятность того, что он удил рыбу в первом месте.

98. Предположим, что 5% всех мужчин и 0,25% всех женщин дальтоники. Наугад выбранное лицо страдает дальтонизмом. Какова вероятность того, что это мужчина? (Считать, что мужчин и женщин одинаковое число).

99. Имеются три партии деталей по 10 деталей в каждой. Число стандартных деталей в первой, второй и третьей партиях соответственно равно 10, 5, 1. Из наудачу выбранной партии наудачу извлечена деталь, оказавшаяся стандартной. Найти вероятность того, что деталь была извлечена из третьей партии.

100. В специализированную больницу поступают в среднем 70% больных с заболеванием X, 20% – с заболеванием Y, 10% – с заболеванием Z. Вероятность полного излечения болезни X равна 0,7 для болезней Y и Z эти вероятности соответственно равны 0,8 и 0,9. Больной, поступивший в больницу, был выписан здоровым. Найти вероятность того, что этот больной страдал заболеванием Z.

101. В трех ящиках имеются белые и черные шары. Известно, что во втором и третьем ящиках число шаров одинаково, причем в два раза больше, чем в первом. Про ящики также известно, что во втором ящике черных и белых шаров поровну, в первом ящике белых шаров в 4 раза больше, чем черных, а в третьем ящике черных шаров столько же, сколько и в первом. Из наугад выбранного ящика случайным образом вынимают шар. Какова вероятность того, что он белый.

102. В ящике лежат 20 теннисных мячей, в том числе 12 новых и 8 игранных. Из ящика извлекаются наугад два мяча для игры, и после игры возвращаются обратно. После этого из ящика вынимают два мяча для следующей игры. Найти вероятность того, что эти оба мяча окажутся новыми.

103. Прибор может работать в двух режимах: A и B. Режим A наблюдается в 80% всех случаев работы прибора; режим B – в 20%. Вероятность выхода прибора из строя за время t в режиме A равна 0,1, в режиме B – 0,7. Найти вероятность выхода прибора из строя за время t.

104. Имеются два ящика: в первом 2 белых шара и 4 черных; во втором 3 белых и 5 черных. Из первого ящика во второй перекладывают, не глядя, один шар. После этого из второго ящика берут один шар. Найти вероятность того, что этот шар будет белым.

105. Приборы одного наименования изготовляются двумя заводами; первый завод поставляет 2/3 всех изделий, поступающих на производство; второй – 1/3. Надежность (вероятность безотказной работы) прибора, изготовленного первым заводом, равна 0,4; второго – 0,9. Определить полную надежность прибора, поступившего на производство.

106. Из 10 студентов, пришедших на экзамен, 3 подготовленных отлично, 4 – хорошо, 2 – удовлетворительно и 1 – плохо. В экзаменационных билетах имеются 20 вопросов. Отлично подготовленный студент может ответить на все 20 вопросов, хорошо подготовленный – на 16, удовлетворительно подготовленный – на 10, плохо подготовленный – на 5. Вызванный наугад студент ответил на произвольно заданный вопрос. Найти вероятность того, что студент подготовлен отлично.

107. Пассажир может обратиться за билетом в одну из трех касс. Вероятности обращения в каждую кассу зависят от их места расположения и равны соответственно 0,3, 0,6 и 0,1. Вероятность того, что к моменту прихода пассажира имеющиеся в кассе билеты будут распроданы, равна для первой кассы 0,4, для второй 0,6, для третьей 0,2. Пассажир направился за билетом в одну из касс и приобрел билет. Найти вероятность того, что это была первая касса.

2.4. Формула Бернулли. Локальная и интегральная теоремы Муавра-Лапласа. Формула Пуассона

Если производится несколько испытаний, причем вероятность события A в каждом испытании не зависит от исходов других испытаний, то такие испытания называют *независимыми относительно события А*.

Пусть производится n независимых одинаковых испытаний, в каждом из которых событие A может наступить с одной и той же вероятностью p. Тогда вероятность $P_n(m)$ того, что событие наступило m раз в этой серии испытаний можно вычислить по одной из следующих формул.

$$\boxed{\text{Формула Бернулли } P_n(m)=C_n^m p^m q^{n-m}}$$

Вероятность того, что в n испытаниях событие наступит: а) менее m раз; б) более m раз; в) не менее m раз; г) не более m раз, находят соответственно по формулам:

$$\text{а) } P_n(0)+P_n(1)+\ldots+P_n(m-1);$$
$$\text{б) } P_n(m+1)+P_n(m+2)+\ldots+P_n(n);$$
$$\text{в) } P_n(m)+P_n(m+1)+\ldots+P_n(n);$$
$$\text{г) } P_n(0)+P_n(1)+\ldots+P_n(m).$$

Пример 21. Вероятность того, что расход электроэнергии в продолжение одних суток не превысит установленной нормы, равна $p=0,75$. Найти вероятность того, что в ближайшие 6 суток расход электроэнергии в течение четырех суток не превысит нормы.

Решение. Вероятность нормального расхода электроэнергии в продолжение каждых из 6 суток постоянна и равна $p=0,75$. Следовательно, вероятность перерасхода электроэнергии в каждые сутки также постоянна и равна $q=1-p=1-0,75=0,25$.

Искомая вероятность по формуле Бернулли равна

$$P_6(4)=C_6^4\cdot p^4\cdot q^2=\frac{6\cdot 5}{1\cdot 2}\cdot(0,75)^4\cdot(0,25)^2=0,3.$$

Пример 22. Монету бросают 6 раз. Найти вероятность того, что герб выпадет: а) менее двух раз; б) не менее двух раз.

Решение. Вероятность появления герба в одном испытании равна $p=\dfrac{1}{2}.$

а) Вероятность выпадения герба менее двух раз в шести независимых испытаниях рана:

$$P = P_6(0) + P_6(1) = C_6^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 + C_6^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{7}{64}.$$

б) Вероятность появления герба в шести независимых испытаниях не менее двух раз, находим по формуле:

$$P = 1 - \left[P_6(0) + P_6(1)\right] = 1 - \frac{7}{64} = \frac{57}{64}.$$

Пример 23. Два равносильных шахматиста играют в шахматы. Что вероятнее: выиграть две партии из четырех или три партии из шести (ничьи во внимание не принимаются)?

Решение. Играют равносильные шахматисты, поэтому вероятность выигрыша каждого равна $p = \frac{1}{2}$. Следовательно, вероятность проигрыша q равна $\frac{1}{2}$.

Так как во всех партиях вероятность выигрыша постоянна и безразлично, в какой последовательности будут выиграны партии, то применима формула Бернулли.

Вероятность того, что две партии из четырех будут выиграны:

$$P_4(2) = C_4^2 p^2 q^2 = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{6}{16}.$$

Вероятность того, что будут выиграны три партии из шести:

$$P_6(3) = C_6^3 p^3 q^3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5}{16}.$$

Так как $P_4(2) > P_6(3)$, то вероятнее выиграть две партии из четырех, чем три из шести.

Формула Пуассона $P_n(m) \approx \dfrac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$, $\lambda = np$

Пример 24. Завод отправил на базу 5000 доброкачественных изделий. Вероятность того, что в пути изделие повредится, равно 0,0002. Найти вероятность того, что на базу прибудут 3 негодных изделия.

Решение. По условию, $n = 5000$, $p = 0{,}0002$, $m = 3$, $\lambda = np = 5000 \cdot 0{,}0002 = 1$.

По формуле Пуассона искомая вероятность приближенно равна

$$P_{5000}(3) = \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!} = \frac{e^{-1}}{3!} = \frac{1}{6e} \approx 0{,}06.$$

Локальная теорема Муавра-Лапласа

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi\left(\frac{m - np}{\sqrt{npq}}\right), \text{ где } \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Значения функции $\varphi(x)$ для $0 \le x \le 5$ даны в таблице (см. приложение). Эта функция обладает свойствами: 1) $\varphi(-x) = \varphi(x)$ и 2) $\varphi(x) \approx 0$ при $x > 5$.

Данная формула дает хорошие приближения лишь при достаточно больших значениях n.

Пример 25. Найти вероятность того, что событие A наступит ровно 80 раз в 400 испытаниях, если вероятность появления этого события в каждом испытании равна 0,2.

Решение. По условию, $n = 400; m = 80; p = 0,2; q = 0,8$. По локальной теореме Муавра-Лапласа получаем:

$$P_{400}(80) \approx \frac{1}{\sqrt{400 \cdot 0,2 \cdot 0,8}} \cdot \varphi\left(\frac{80 - 400 \cdot 0,2}{\sqrt{400 \cdot 0,2 \cdot 0,8}}\right) = \frac{1}{8} \cdot \varphi(0).$$

По таблице приложения находим $\varphi(0) = 0,3989$. Искомая вероятность

$$P_{400}(80) = \frac{1}{8} \cdot 0,3989 = 0,04986.$$

Если число испытаний $n \le 30$, то для вычисления вероятности $P_n(m)$ применяют формулу Бернулли, если же $n > 30$, то формулу Пуассона (если $\lambda = np < 10$) или локальную теорему Муавра-Лапласа (в остальных случаях).

Вероятность того, что событие наступит в пределах от m_1 до m_2 раз можно вычислить, используя интегральную теорему Муавра-Лапласа.

Интегральная теорема Муавра-Лапласа

$$P_n(m_1, m_2) \approx \Phi\left(\frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}\right)$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ – функция Лапласа

Значения функции $\Phi(x)$ для $0 \le x \le 4$ даны в таблице (см. приложение). Эта функция обладает свойствами: 1) $\Phi(-x) = -\Phi(x)$ и 2) $\Phi(x) \approx 0,5$ при $x > 4$.

Пример 26. Вероятность того, что деталь не прошла проверку ОТК, равна $p = 0,2$. Найти вероятность того, что среди 400 случайно отобранных деталей окажется непроверенных от 70 до 100 деталей.

Решение. По условию, $n = 400;\ m_1 = 70;\ m_2 = 100;\ p = 0,2;\ q = 0,8$. Воспользуемся интегральной теоремой Муавра-Лапласа:

$$P_{400}(70,\ 100) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \text{ где}$$

$$x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{70 - 400 \cdot 0,2}{\sqrt{400 \cdot 0,2 \cdot 0,8}} = -1,25;\ x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{100 - 400 \cdot 0,2}{\sqrt{400 \cdot 0,2 \cdot 0,8}} = 2,5.$$

Таким образом, $P_{400}(70,100) \approx \Phi(2,5) - \Phi(-1,25) = \Phi(2,5) + \Phi(1,25)$.

По таблице приложения: $\Phi(2,5)=0,4938, \Phi(1,25)=0,3944$.

Искомая вероятность $P_{400}(70,100)=0,4938+0,3944=0,8882$.

Число m_0 (наступления события в независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p) называется *наивероятнейшим*, если вероятность того, что событие наступит в этих испытаниях m_0 раз, превышает (или, по крайней мере, не меньше) вероятности остальных возможных исходов испытаний.

Наивероятнейшее число m_0 определяется из двойного неравенства

$$np-q \le m_0 \le np+p.$$

Пример 27. Товаровед осматривает 24 образца товаров. Вероятность того, что каждый из образцов будет признан годным к продаже, равна 0,6. Найти наивероятнейшее число образцов, которые товаровед признает годными к продаже.

Решение. По условию, $n=24; p=0,6; q=0,4$. Найдем наивероятнейшее число годных к продаже образцов товаров из двойного неравенства $np-q \le m_0 < np+p$. Подставляя данные задачи, получим:

$$24\cdot 0,6-0,4 \le m_0 \le 24\cdot 0,6+0,6, \text{ или } 14 \le m_0 \le 15.$$

Наивероятнейших значений два: $m_0^{(1)}=14$ и $m_0^{(2)}=15$.

Пример 28. Чему равна вероятность p наступления события в каждом из 49 независимых испытаний, если наивероятнейшее число наступлений события в этих испытаниях равно 30?

Решение. По условию задачи, $n=49, m_0=30$. Воспользуемся двойным неравенством $np-q \le m_0 \le np+p$. Подставляя данные задачи, получим систему неравенств для определения неизвестной вероятности p:

$$\begin{cases} 49p+p>30 \\ 49p-(1-p)\le 30 \end{cases}.$$

Из первого неравенства: $p>0,6$. Из второго неравенства: $p\le 0,62$.

Итак, искомая вероятность должна удовлетворять двойному неравенству:

$$0,6<p\le 0,62.$$

Задачи

108. При проведении зачета с помощью ЭВМ студенту предлагается 5 вопросов. Вероятность того, что студент правильно ответит на 1 вопрос, равна 0,5. Для получения зачета студенту необходимо правильно ответить не менее чем на 3 вопроса. Найти вероятность получения зачета.

109. Какова вероятность того, что в группе, состоящей из 30 студентов, никто не родился в сентябре?

110. Рыбак забросил спиннинг 100 раз. Какова вероятность того, что он поймал хотя бы одну рыбу, если одна рыба приходится в среднем на 200 забрасываний.

111. Вероятность появления фальшивой банкноты в банке равна $p = 10^{-8}$. В течение рабочей недели банк оперирует с $n = 7{,}5 \cdot 10^{8}$ банкнотами. Оценить вероятности встретить в ходе обработки 0; 1; 2; 3 фальшивые банкноты.

112. Товаровед исследует 50 образцов некоторого товара. Производитель этого товара указывает, что процент брака составляет 15%. Найти наивероятнейшее число образцов, которые товаровед признает как годные.

113. Транспортная фирма занимается перевозкой изделий со склада в магазин. Вероятность того, что при перевозке изделие будет повреждено, равна 0,002. Фирме необходимо перевести 1000 изделий. Найти вероятность того, что магазин получит: а) хотя бы одно поврежденное изделие; б) менее двух поврежденных изделий; в) 3% поврежденных изделий. Какова вероятность наиболее вероятного числа поврежденных изделий в наудачу выбранных пяти контейнерах (в одном контейнере – 20 изделий).

114. Вероятность изготовления на автоматическом станке стандартной детали равна 0,8. Найти вероятности возможного числа появления бракованных деталей среди 5 отобранных.

115. В течение часа фирма принимает в среднем k сообщений по электронной почте, обработкой которых занимается специальный сотрудник. Какова вероятность того, что за m минут на фирму не поступит ни одного сообщения? Решить задачу, когда: а) $k = 2,\ m = 45$; б) $k = 60,\ m = 5$.

116. Имеется партия изделий. Каждое из них независимо от других может оказаться дефектным с вероятностью 0,2. Из партии берут 10 изделий и проверяют их на годность. Если число дефектных изделий при этом не более 1, то партию принимают, в противном случае подвергают сплошному контролю. Какова вероятность того, что партия будет принята?

117. В лотерее 40 000 билетов, ценные выигрыши попадают на 3 билета. Определить: а) вероятность получения хотя бы одного выигрыша на 1000 билетов; б) сколько необходимо приобрести билетов, чтобы вероятность получения ценного выигрыша была не менее 0,5.

118. Найти вероятность того, что событие А наступит ровно 80 раз в 400 испытаниях, если вероятность появления этого события в каждом испытании равна 0,2.

119. Вероятность поражения мишени стрелком при одном выстреле $p = 0{,}75$. Найти вероятность того, что при 10 выстрелах стрелок поразит мишень 8 раз.

120. Вероятность того, что деталь не прошла проверку ОТК, равна $p = 2$. Найти вероятность того, что среди 400 случайных отобранных деталей окажется непроверенных от 70 до 100 деталей.

121. На факультете насчитывается 1825 студентов. Какова вероятность того, что 1 сентября является днем рождения одновременно четырех студентов факультета?

122. В некоторой местности из каждых 100 семей 80 имеют холодильники. Найти вероятность того, что: а) из 400 семей 300 имеют холодильники; б) от 300 до 360 семей из 400 имеют холодильники.

123. Автоматическая телефонная станция получает в среднем за час 300 вызовов. Какова вероятность того, что за данную минуту она получит точно два вызова?

124. Книга в 1000 страниц имеет 100 опечаток. Какова вероятность того, что на случайно выбранной странице не менее четырех опечаток?

125. Какова вероятность, что при 100 бросаниях монеты «герб» появится от 40 до 60 раз?

126. В некоторой местности в сентябре в среднем бывает 12 дождливых дней. Какова вероятность, что из случайно взятых в этом месяце восьми дней три дня окажутся дождливыми?

127. Монету бросают пять раз. Найти вероятность того, что “герб” выпадет: а) менее двух раз, б) не менее двух раз.

128. В ходе аудиторской проверки строительной компании аудитор случайным образом отбирает пять счетов. Если 3% счетов содержат ошибки, чему равна вероятность того, что аудитор найдет следующее: а) только один счет будет с ошибкой; б) хотя бы один счет будет с ошибкой?

129. Вероятность получения удачного результата при производстве сложного химического опыта равна 2/3. Найти наивероятнейшее число удачных опытов, если общее их количество равно 7.

130. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле равна 0,001. Найти вероятность попадания в цель двух пуль и более, если число выстрелов равно 5000.

131. Вероятность того, что любой абонент позвонит на станцию в течение часа, равна 0,01. Телефонная станция обслуживает 800 абонентов. Какова вероятность, что в течение часа позвонят 5 абонентов.

132. Магазин получил 1000 бутылок минеральной воды. Вероятность того, что при перевозке бутылка окажется разбитой, равна 0,003. Найти вероятность того, что магазин получит разбитых бутылок: а) ровно две; б) менее двух; в) более двух; г) хотя бы одну.

133. Вероятность появления успеха в каждом испытании равна 0,25. Какова вероятность, что при 300 испытаниях успех наступит: а) ровно 75 раз, б) ровно 85 раз?

134. Всхожесть семян данного растения равна 0,9. Найти вероятность того, что из 900 посаженных семян число проросших будет заключено между 790 и 830.

135. Найти вероятность того, что событие A наступит 1400 раз в 2400 испытаниях, если вероятность появления этого события в каждом испытании равна 0,6.

136. Производство дает 1% брака. Какова вероятность того, что из взятых на исследование 1100 изделий забраковано не больше 17?

137. Какова вероятность того, что в столбике из 100 наугад отобранных монет число монет, расположенных «гербом» вверх, будет от 45 до 55?

138. Игральная кость бросается 16 раз. Найти наивероятнейшее число появлений числа очков, кратного трем.

139. На факультете 731 студент. Вероятность рождения студента в данный день равна 1/365. Найти наиболее вероятное число студентов, родившихся 1 января, и вероятность того, что найдутся три студента с одним и тем же днем рождения.

140. В камере хранения ручного багажа 80% всей клади составляют чемоданы, которые вперемешку с другими вещами хранятся на стеллажах. Через окно выдачи были получены все вещи одного стеллажа в количестве 50 мест. Найти вероятность того, что среди выданных вещей было 38 чемоданов.

141. Если в среднем левши составляют 1%, каковы шансы на то, что среди 200 человек окажется ровно четверо левшей.

142. В страховом обществе застрахованы 10 000 лиц одного возраста и одной социальной группы. Вероятность смерти в течение года для каждого лица равна 0,006. Каждый застрахованный вносит 1 января 12 руб. страховых, и в случае смерти его родственники получают от общества 1000 руб. Найти вероятность того, что: а) общество потерпит убыток; б) общество получит прибыль, не меньше 40 000, 60 000, 80 000 руб.

143. Прибор состоит из пяти независимо работающих элементов. Вероятность отказа элемента в момент включения прибора равна 0,2. Найти: а) наивероятнейшее число отказавших элементов; б) вероятность наивероятнейшего числа отказавших элементов; в) вероятность отказа прибора, если для этого достаточно, чтобы отказали хотя бы четыре элемента.

144. Два равносильных противника играют в шахматы. Что вероятнее: а) выиграть одну партию из двух или две партии из четырех? б) выиграть не менее двух партий из четырех или не менее трех партий из пяти? Ничьи во внимание не принимаются.

145. В семье пять детей. Найти вероятность того, что среди этих детей: а) два мальчика; б) не более двух мальчиков; в) более двух мальчиков; г) не менее двух и не более трех мальчиков. Вероятность рождения мальчика принять равной 0,51.

3. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

3.1. Случайные величины. Биноминальный закон распределения. Закон распределения Пуассона

Случайной величиной называют числовую величину, которая в результате испытания примет одно и только одно возможное значение, наперед не известное и зависящее от случайных причин, которые заранее не могут быть учтены.

Дискретной называют случайную величину, которая принимает отдельные, изолированные возможные значения. *Непрерывной* называют случайную величину, которая может принимать все значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка.

Законом распределения случайной величины называют соответствие между возможными значениями и их вероятностями. Для дискретной случайной величины его можно задать таблично, аналитически (в виде формулы) и графически.

Биномиальным называют распределение вероятностей, определяемое формулой Бернулли. Биноминальный закон в виде таблицы можно записать в виде:

X	0	…	m	...	n
P	q^n	…	$C_n^m p^m q^{n-m}$	…	p^n

Пример 29. Составить закон распределения вероятностей числа появлений события A в трех независимых испытаниях, если вероятность появления события в каждом испытании равна 0,6.

Р е ш е н и е. Вероятность появления события в каждом испытании равна 0,6, следовательно, вероятность непоявления события в каждом испытании $q=1-0,6=0,4$.

В трех независимых испытаниях событие A может появиться либо 3 раза, либо 2 раза, либо 1 раз, либо совсем не появиться. Таким образом, возможные значения X таковы: $x_1=0;\ x_2=1;\ x_3=2;\ x_4=3$. Найдем вероятности этих возможных значений по формуле Бернулли:

$$P(X=0)=P_3(0)=C_3^0 p^0 q^3=(0,4)^3=0,064,$$

$$P(X=1)=P_3(1)=C_3^1 p^1 q^2=3\cdot 0,6\cdot (0,4)^2=0,288,$$

$$P(X=2)=P_3(2)=C_3^2 p^2 q^1=3\cdot (0,6)^2\cdot 0,4=0,432,$$

$$P(X=3)=P_3(3)=C_3^3 p^3 q^0=(0,6)^3=0,216.$$

Напишем искомый закон распределения:

X	0	1	2	3
P	0,064	0,288	0,432	0,216

Контроль: 0,216 + 0,432 + 0,288 + 0,064 = 1.

Пример 30. В партии из 10 деталей имеется 8 стандартных. Наудачу отобраны две детали. Составить закон распределения числа стандартных деталей среди отобранных.

Р е ш е н и е . Случайная величина X – число стандартных деталей среди отобранных деталей – имеет следующие возможные значения:

$$x_1 = 0;\ x_2 = 1;\ x_3 = 2.$$

Найдем вероятности возможных значений X:

$$P(X=0)=\frac{C_8^0\cdot C_2^2}{C_{10}^2}=\frac{1}{45};\ P(X=1)=\frac{C_8^1\cdot C_2^1}{C_{10}^2}=\frac{16}{45};\ P(X=2)=\frac{C_8^2\cdot C_2^0}{C_{10}^2}=\frac{28}{45}.$$

Составим искомый закон распределения:

X	0	1	2
P	1/45	16/45	28/45

Контроль: $\frac{1}{45}+\frac{16}{45}+\frac{28}{45}=1.$

Пример 31. Из двух орудий поочередно ведется стрельба по цели до первого попадания одним из орудий. Вероятность попадания в цель первым орудием равна 0,3, вторым – 0,7. Начинает стрельбу первое орудие. Составить законы распределения дискретных случайных величин X и Y – числа израсходованных снарядов соответственно первым и вторым орудием.

Р е ш е н и е . Пусть события A_i и B_i – попадание в цель соответственно первым и вторым орудием при i – м выстреле; $\overline{A}_i$ и $\overline{B}_i$ – промахи.

Найдем закон распределения случайной величины X – числа израсходованных первым орудием снарядов. Первое орудие израсходует один снаряд $(X=1)$, если оно попадет в цель при первом выстреле, или оно промахнется, а второе орудие при первом выстреле попадет в цель:

$$P(X=1)=P\left(A_1+\overline{A}_1B_1\right)=P\left(A_1\right)+P\left(\overline{A}_1B_1\right)=P\left(A_1\right)+P\left(\overline{A}_1\right)\cdot P\left(B_1\right)=0,3+$$
$$+0,7\cdot 0,7=0,49.$$

Первое орудие израсходует два снаряда, если оба орудия при первом выстреле промахнутся, а при втором выстреле первое орудие попадет в цель, или если оно промахнется, а второе орудие при втором выстреле попадет в цель:

$$P(X=2)=P\left(\overline{A}_1\overline{B}_1A_2+\overline{A}_1\overline{B}_1\overline{A}_2B_2\right)=0,7\cdot 0,3\cdot 0,3+0,7\cdot 0,3\cdot 0,7\cdot 0,7=0,79\cdot 0,21.$$

Аналогично получим $P(X=m)=0,79\cdot 0,21^{m-1}.$

Искомый закон распределения дискретной случайной величины X – числа снарядов, израсходованных первым орудием:

X	1	2	3	…	m	…
P	0,79	$0,79\cdot 0,21$	$0,79\cdot 0,21^2$	…	$0,79\cdot 0,21^{m-1}$	…

Найдем закон распределения дискретной случайной величины Y – числа снарядов, израсходованных вторым орудием.

Если первое орудие при первом выстреле попадает в цель, то стрельба из второго орудия не будет произведена:

$$P(Y=0)=P\left(A_1\right)=0,3.$$

Второе орудие израсходует лишь один снаряд, если при первом выстреле оно попадает в цель, или если оно промахнется, а первое орудие попадет в цель при втором выстреле:

$$P(Y=1)=P\left(\bar{A}_1B_1+\bar{A}_1\bar{B}_1A_2\right)=0,7\cdot 0,7+0,7\cdot 0,3\cdot 0,3=0,553.$$

Вероятность того, что второе орудие израсходует два снаряда,

$$P(Y=2)=P\left(\bar{A}_1\bar{B}_1\bar{A}_2\bar{B}_2+\bar{A}_1\bar{B}_1\bar{A}_2\bar{B}_2A_3\right)=0,553\cdot 0,21.$$

Аналогично получим $P(Y=m)=0,553\cdot 0,21^{m-1}$.

Искомый закон распределения дискретной случайной величины Y – числа снарядов, израсходованных вторым орудием:

Y	0	1	2	…	m	…
P	0,3	0,553	$0,553\cdot 0,21$	…	$0,553\cdot 0,21^{m-1}$	…

Закон распределения Пуассона вероятностей массовых (n велико) и редких (p мало) событий определяется формулой: $P_n(m)\approx\dfrac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$. Эту формулу применяют, если $\lambda=np<10$.

Пример 32. Магазин получил 1000 бутылок минеральной воды. Вероятность того, что при перевозке бутылка окажется разбитой, равна 0,003. Найти вероятность того, что магазин получит ровно две разбитых бутылки.

Решение. Число $n=1000$ велико, вероятность $p=0,003$ мала и рассматриваемые события независимы, поэтому имеет место формула Пуассона:

$$P_n(m)\approx\frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}.$$

$\lambda=1000\cdot 0,003=3<10.$ Следовательно, $P_{1000}(2)\approx\dfrac{3^2\cdot e^{-3}}{2!}=\dfrac{9\cdot 0,04979}{2}=0,2241.$

Пример 33. Вероятность выигрыша по одному лотерейному билету $p=0,01$. Сколько нужно купить билетов, чтобы выиграть хотя бы по одному из них с вероятностью P, не меньшей, чем 0,95?

Решение. Вероятность выигрыша мала, а число билетов, которое нужно купить, очевидно, велико, поэтому случайное число выигрышных билетов имеет приближенно распределение Пуассона.

События «ни один из купленных билетов не является выигрышным» и «хотя бы один билет – выигрышный» являются противоположными, тогда сумма вероятностей этих событий равна единице: $P_n(0)+P=1$, значит $P=1-P_n(0)$.

Положив $m=0$ в формуле Пуассона, получим, что $P_n(0)=e^{-\lambda}$. И тогда, $P=1-e^{-\lambda}$. По условию, $P\ge 0,95$, или $1-e^{-\lambda}\ge 0,95$ или $e^{-\lambda}\le 0,05$.

По таблице функции e^{-x} находим $e^{-3}=0,05$. Учитывая, что функция e^{-x} – убывающая, заключаем, что последнее неравенство справедливо при $\lambda\ge 3$, или при $np\ge 3$. Тогда, $n\ge 3/p=3/0,01=300$.

Итак, надо купить не менее 300 билетов, чтобы выиграть хотя бы по одному из них.

Задачи

Составьте законы распределения случайной величины X.

146. Абитуриент при поступлении в институт сдает четыре экзамена, вероятность успешно сдать каждый экзамен равна 0,8. Случайная величина X описывает число сданных абитуриентом экзаменов (в предположении, что различные экзамены представляют собой независимые испытания).

147. В группе из 5 изделий имеется одно бракованное. Чтобы его обнаружить, выбирают наугад одно изделие за другим и каждое вынутое проверяют. X – число проверенных изделий.

148. Имеется 6 ключей, из которых только один подходит к замку. Составить ряд распределения числа попыток при открывании замка, если испробованный ключ в последующих опробованиях не участвует.

149. Экзаменатор задаёт студенту вопросы до того момента, как студент не отвечает на очередной вопрос. Вероятность ответить на вопрос для студента равна 0,7. X – число заданных вопросов.

150. Стрелок делает выстрелы до первого попадания в цель. Вероятность попадания 0,8. Стрелку выдано 4 патрона. X – число истраченных патронов.

151. Бросаются 2 игральные кости. Пусть X – сумма выпавших очков на верхних гранях этих костей.

152. Вероятность сбоя одного компьютера в вычислительном центре в течение дня равна 0,2. X – число компьютеров, на которых произошёл сбой в течение дня, если общее количество компьютеров равно 5.

153. Из ящика, в котором 3 белых и два чёрных шара вынимают по очереди три шара (не возвращая их обратно, возвращая обратно). X – количество белых шаров среди вынутых.

154. Два стрелка независимо друг от друга делают по одному выстрелу по одной и той же мишени. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка 0,7, для второго – 0,6. X – общее число попаданий в мишень.

155. Вероятность получения для предпринимателя в размере 50 т.р. в первом банке равна 0,6, в размере 40 т.р. во втором банке – 0,7. X – размер полученного кредита.

156. Один билет лотереи стоит 100 руб. Всего продаётся 1000 билетов. На один билет приходится выигрыш в 20 000 руб., на два билета – по 250 руб., на пять билетов – по 100 руб. X – размер чистого выигрыша на один купленный билет.

157. Стрелок производит выстрелы по мишени до первого попадания. Вероятность попадания при одном выстреле равна 0,6. X – число произведённых выстрелов.

158. В магазине имеются 20 телевизоров, из них 7 имеют дефекты. X – число телевизоров с дефектами среди выбранных наудачу пяти.

159. В денежной лотерее выпущено 100 билетов. Разыгрывается один выигрыш в 50 руб. и десять выигрышей по 1 руб. Найти закон распределения случайной величины X – размер возможного выигрыша для владельца одного лотерейного билета.

160. Монета брошена 2 раза. Написать в виде таблицы закон распределения случайной величины X – числа выпадения «герба».

161. Стрелок производит по мишени три выстрела. Вероятность попадания в мишень при каждом выстреле равна 0,3. Построить ряд распределения числа попаданий.

162. В лотерее разыгрывается: автомобиль стоимостью 5000 ден.ед., 4 телевизора стоимостью 250 ден.ед., 5 видеомагнитофонов стоимостью 200 ден.ед. Всего продается 1000 билетов по 7 ден.ед. X – чистый выигрыш, полученный участником лотереи, купившим один билет.

163. Вероятности того, что студент сдаст семестровый экзамен в сессию по дисциплинам А и Б, равны соответственно 0,7 и 0,9. Составить закон распределения числа семестровых экзаменов, которые сдаст студент.

164. Даны вероятности значений случайной величины X: значение 10 имеет вероятность 0,3; значение 2 – вероятность 0,4; значение 8 – вероятность 0,1; значение 4 – вероятность 0,2. Построить ряд распределения случайной величины X.

165. Пивной завод отправил в магазин 400 ящиков пива. Вероятность того, что ящик будет разбит при транспортировке в данных условиях, равна 0,005. По приезде в магазин экспедитор, перевозивший груз, заявил, что семь ящиков с пивом были разбиты при транспортировке. Размышляя, может ли доверять экспедитору, директор магазина хочет найти вероятность разбить семь ящиков, вероятность разбить не менее семи ящиков.

166. В банк поступило 4000 пакетов денежных знаков. Вероятность того, что пакет содержит недостаточное или избыточное количество денежных знаков, равна 0,0001. Найти: а) вероятность того, что при проверке будет обнаружен хотя бы один ошибочно укомплектованный пакет; б) вероятность того, что при проверке будет обнаружено не более трех ошибочно укомплектованных пакетов.

3.2. Числовые характеристики дискретных случайных величин

Числа, которые описывают случайную величину суммарно, называют *числовыми характеристиками* случайной величины. К числу важных числовых характеристик относятся: математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратическое отклонение.

Математическим ожиданием дискретной случайной величины называют сумму произведений всех ее возможных значений на их вероятности, т.е.

$$M(X)=\sum_{i=1}^{n(\infty)} x_i p_i.$$

Пример 34. Найти математическое ожидание случайной величины X, зная закон ее распределения:

X	2	3	5
P	0,3	0,1	0,6

Решение. Искомое математическое ожидание равно сумме произведений всех возможных значений случайной величины на их вероятности:

$$M(X)=2\cdot 0{,}3+3\cdot 0{,}1+5\cdot 0{,}6=3{,}9.$$

Пример 35. Найти математическое ожидание суммы числа очков, которые могут выпасть при бросании двух игральных костей.

Решение. Обозначим число очков, которое может выпасть на первой кости, через X и на второй – через Y. Возможные значения этих величин одинаковы и равны 1, 2, 3, 4, 5 и 6, причем вероятность каждого из этих значений равна $\frac{1}{6}$.

Математическое ожидание числа очков, которые могут выпасть на первой кости:

$$M(X)=1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{6}+4\cdot\frac{1}{6}+5\cdot\frac{1}{6}+6\cdot\frac{1}{6}=\frac{7}{2}.$$

Очевидно, что $M(Y)=\frac{7}{2}$.

Искомое математическое ожидание: $M(X+Y)=M(X)+M(Y)=7/2+7/2=7.$

Дисперсией дискретной случайной величины называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:

$$D(X)=M\left[X-M(X)\right]^2=M\left(X^2\right)-\left[M(X)\right]^2.$$

Пример 36. Найти дисперсию случайной величины X, которая задана следующим законом распределения:

X	1	2	5
P	0,3	0,5	0,2

Решение. Найдем математическое ожидание:

$$M(X)=1\cdot 0{,}3+2\cdot 0{,}5+5\cdot 0{,}2=2{,}3.$$

Найдем все возможные значения квадрата отклонения:

$$[x_1 - M(X)]^2 = (1-2,3)^2 = 1,69;$$
$$[x_2 - M(X)]^2 = (2-2,3)^2 = 0,09;$$
$$[x_3 - M(X)]^2 = (5-2,3)^2 = 7,29.$$

Закон распределения квадрата отклонения будет иметь вид:

$[X-M(X)]^2$	1,69	0,09	7,29
P	0,3	0,5	0,2

По определению $D(X) = 1,69 \cdot 0,3 + 0,09 \cdot 0,5 + 7,29 \cdot 0,2 = 2,01.$

Используя данный способ, вычисления оказываются относительно громоздкими. Рассмотрим второй способ нахождения дисперсии, используя данные той же задачи.

1. Найдем математическое ожидание $M(X)$;

2. Напишем закон распределения случайной величины X^2:

X^2	4	9	25
P	0,1	0,6	0,3

3. Найдем математическое ожидание $M\left(X^2\right) = 4 \cdot 0,1 + 9 \cdot 0,6 + 25 \cdot 0,3 = 13,3.$

4. Искомая дисперсия $D(X) = M\left(X^2\right) - \left[M(X)\right]^2 = 13,3 - (3,5)^2 = 1,05.$

Средним квадратическим отклонением случайной величины X называют квадратный корень из дисперсии: $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$.

Пример 37. Случайная величина X задана законом распределения

X	2	3	10
P	0,1	0,4	0,5

Найти среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$.

Р е ш е н и е. Найдем математическое ожидание X:

$$M(X) = 2 \cdot 0,1 + 3 \cdot 0,4 + 10 \cdot 0,5 = 6,4.$$

Найдем математическое ожидание X^2:

$$M(X^2) = 2^2 \cdot 0,1 + 3^2 \cdot 0,4 + 10^2 \cdot 0,5 = 54.$$

Найдем дисперсию: $D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = 54 - 6,4^2 = 13,04.$

Искомое среднее квадратическое отклонение $\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{13,04} = 3,61.$

Задачи

167. Для продвижения своей продукции на рынок фирма раскладывает по почтовым ящикам рекламные листки. Прежний опыт работы фирмы показывает, что примерно в одном случае из 2000 следует заказ. Найти вероятность того, что при размещении 10 000 рекламных листков поступит хотя бы один заказ, а также дисперсию числа поступивших заказов.

168. В партии из 7 изделий 3 бракованных. Наудачу выбирают 5 изделий. X – число стандартных изделий среди выбранных. Составьте ряд распределения, вычислите математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X. Постройте график ее функции распределения.

169. Стрелок стреляет по мишени 4 раза. Вероятность попадания при одном выстреле равна 0,6. Найдите закон распределения случайной величины X – число попаданий в мишень. Вычислите ее математическое ожидание и дисперсию.

170. В результате анализа счетов 400 инвесторов на фондовой бирже получена следующая информация о количестве сделок за последний месяц:

Кол-во сделок	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Кол-во инвесторов	146	97	73	34	23	10	6	3	4	2	2

Определить вероятности того, что случайно выбранный инвестор произвел: а) ни одной сделки; б) по крайней мере, одну сделку; в) более пяти сделок; г) менее шести сделок. Найти математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение числа сделок.

171. Начальный капитал торговца-«челнока» составляет 10 000 руб. Опытные коллеги сказали ему, что после каждой поездки капитал с вероятностью $1/2$ увеличивается в полтора раза, с вероятностью $1/4$ остается без изменений и с вероятностью $1/4$ уменьшается в полтора раза. Составить ряд распределения капитала торговца после двух поездок и найти его математическое ожидание.

172. Найти математическое ожидание случайной величины X, зная закон ее распределения:

X	2	3	5
P	0,3	0,1	0,6

173. Найти математическое ожидание числа появлений события A в одном испытании, если вероятность события A равна p.

174. Независимые случайные величины X и Y заданы следующими законами распределения. Найти математическое ожидание случайной величины XY.

X	2	5	4
P	0,1	0,6	0,3

Y	7	9
P	0,8	0,2

175. Производится 3 выстрела с вероятностями попадания в цель, равными 0,4; 0,3; 0,6 соответственно. Найти математическое ожидание общего числа попаданий.

176. Найти математическое ожидание суммы числа очков, которые могут выпасть при бросании двух игральных костей.

177. Найти дисперсию случайной величины X, которая задана следующим законом распределения:

X	1	2	5
P	0,3	0,5	0,2

178. Найти дисперсию случайной величины X, которая задана следующим законом распределения:

X	1	2	5
P	0,3	0,5	0,2

179. Случайная величина X задана законом распределения

X	1	2	5
P	0,3	0,5	0,2

Найти среднее квадратическое отклонение.

180. Найти дисперсию случайной величины $Z = 8X - 5Y + 7$, если известно, что случайные величины X и Y независимы и $D(X) = 1{,}5$, $D(Y) = 1$.

181. Из каждой партии телевизоров для контроля извлекают 4 телевизора и последовательно их проверяют. При появлении плохо работающего телевизора бракуется вся партия. X – количество проверенных телевизоров до появления бракованного. Составьте ряд распределения, вычислите математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X, если известно, что вероятность брака равна 0,2. Постройте график ее функции распределения.

182. На карточках записаны двузначные числа от 31 до 60. Карточку извлекают из урны, фиксируют, возвращают в урну и тщательно перемешивают. X – число карточек с цифрой 5 в серии из 4 таких испытаний. Составьте ряд распределения, вычислите математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X. Постройте график ее функции распределения.

183. В цехе имеется 5 однотипных станков. Вероятность выхода из строя одного станка равна 0,8. X – число станков, потребовавших ремонта. Составьте ряд распределения, вычислите математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X. Постройте график ее функции распределения.

3.3. Функция распределения. Функция плотности распределения случайных величин

Функцией распределения называют функцию $F(x)$, определяющую вероятность того, что случайная величина X в результате испытания примет значение, меньшее x, т.е. $F(x) = P(X < x)$.

Пример 38. Дискретная случайная величина X задана законом распределения

X	2	4	7
P	0,5	0,2	0,3

Найти функцию распределения $F(x)$.

Р е ш е н и е. Если $x \le 2$, то $F(x) = 0$. Если $2 < x \le 4$, то $F(x) = 0{,}5$. Если $4 < x \le 7$, то $F(x) = 0{,}7$. Если $x > 7$, то $F(x) = 1$. Итак, искомая функция распределения имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 2, \\ 0{,}5 & \text{при} \quad 2 < x \le 4, \\ 0{,}7 & \text{при} \quad 4 < x \le 7, \\ 1 & \text{при} \quad x > 7. \end{cases}$$

Вероятность того, что случайная величина примет значение, заключенное в интервале (a, b), равна приращению функции распределения на этом интервале:

$$P(a \le X \le b) = F(a) - F(b).$$

Пример 39. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le -1, \\ \dfrac{x}{4} + \dfrac{1}{4} & \text{при} \quad -1 < x \le 3, \\ 1 & \text{при} \quad x > 3. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, принадлежащее интервалу $(0, 2)$.

Р е ш е н и е. $P(0 < X < 2) = F(2) - F(0)$. Так как на интервале $(0, 2)$ $F(x) = \dfrac{x}{4} + \dfrac{1}{4}$, то $F(2) - F(0) = \left(\dfrac{2}{4} + \dfrac{1}{4}\right) - \left(\dfrac{0}{4} + \dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{1}{2}$.

Плотностью распределения вероятностей непрерывной случайной величины X называют функцию $f(x)$ – первую производную от функции распределения $F(x)$: $f(x) = F'(x)$.

Пример 40. Дана функция распределения непрерывной случайной величины X:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 0, \\ \sin 2x & \text{при} \quad 0 < x \le \dfrac{\pi}{4}, \\ 1 & \text{при} \quad x > \dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Найти плотность распределения $f(x)$.

Р е ш е н и е. Плотность распределения равна первой производной от функции распределения:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 0, \\ 2\cos 2x & \text{при} \quad 0 < x \le \dfrac{\pi}{4}, \\ 0 & \text{при} \quad x > \dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу $(a;b)$, равна определенному интегралу от плотности распределения, взятому в пределах от a до b:

$$P(a<X<b)=\int_a^b f(x)\,dx.$$

Пример 41. Задана плотность вероятности случайной величины X

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x\le 0,\\ 2x & \text{при} \quad 0<x\le 1,\\ 0 & \text{при} \quad x>1.\end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, принадлежащее интервалу $(0{,}5;1)$.

Р е ш е н и е. Искомая вероятность равна

$$P(0{,}5<X<1)=2\int_{0,5}^{1} x\,dx=x^2\Big|_{0,5}^{1}=1-0{,}25=0{,}75.$$

Зная плотность распределения $f(x)$, можно найти функцию распределения $F(x)$ по формуле $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx.$

Пример 42. Найти функцию распределения $F(x)$ по данной плотности распределения:

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x\le 1,\\ x-\dfrac{1}{2} & \text{при} \quad 1<x\le 2,\\ 0 & \text{при} \quad x>2.\end{cases}$$

Р е ш е н и е. Используем формулу $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx.$

Если $x\le 1$, то $f(x)=0$, следовательно, $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{1} 0\,dx=0.$

Если $1<x\le 2$, то $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{1} 0\,dx+\int\limits_{1}^{x}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)dx=\left(\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x}{2}\right)\Bigg|_{1}^{x}=\dfrac{x^2-x}{2}.$

Если $x>2$, то $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{1} 0\,dx+\int\limits_{1}^{2}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)dx+\int\limits_{2}^{x} 0\,dx=\left(\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x}{2}\right)\Bigg|_{1}^{2}=2-1=1.$

Итак, искомая функция распределения имеет вид:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x\le 1, \\ \dfrac{x^2-x}{2} & \text{при} \quad 1<x\le 2, \\ 1 & \text{при} \quad x>2. \end{cases}$$

Несобственный интеграл от плотности распределения в пределах от $-\infty$ до ∞ равен единице: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=1$.

Пример 43. Случайная величина задана плотностью распределения

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x\le -\dfrac{\pi}{2}, \\ a\cos x & \text{при} \quad -\dfrac{\pi}{2}<x\le \dfrac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{при} \quad x>\dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Найти коэффициент a.

Р е ш е н и е . Воспользуемся формулой $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=1$.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=\int\limits_{-\infty}^{-\frac{\pi}{2}} 0\,dx+\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a\cos x\,dx+\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} 0\,dx=a\sin x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=a(1+1)=2a=1.$$

Следовательно, $a=\dfrac{1}{2}$.

Задачи

184. Плотность вероятности непрерывной случайной величины X задается формулой $f(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}$, если $0\le x\le \dfrac{\pi}{4}$. Найдите $P\left(X\ge \dfrac{\pi}{6}\right)$.

185. Случайная величина X задана функцией распределения $F(x)=\begin{cases} 0, \text{ если } x\le 0, \\ x^2, \text{ если } 0<x\le 1, \\ 1, \text{ если } x>1. \end{cases}$ Найти плотность вероятности $f(x)$, $P(X=0{,}5)$, $P(X<0{,}5)$, $P(0{,}5\le X\le 1)$.

186. Функция распределения непрерывной случайной величины X (времени безотказной работы некоторого устройства) равна $F(x)=1-e^{-x/T}$ $(x\ge 0)$. Найти вероятность безотказной работы устройства за время $x\ge T$.

187. Случайная величина X задана функцией распределения:

$$F(x)=\begin{cases} 0, \text{ при } x \le 0, \\ 0{,}5x, \text{ при } 0 < x \le 1, \\ 1, \text{ при } x > 1. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате четырех независимых испытаний величина X ровно три раза примет значение, принадлежащее интервалу $(0{,}25;\,0{,}75)$.

188. Случайная величина X задана на всей оси Ox функцией распределения $F(x)=(1/2)+(1/\pi)\operatorname{arctg}(x/2)$. Найти возможное значение x_1, удовлетворяющее условию: с вероятностью $1/6$ случайная величина X в результате испытания примет значение, большее x_1.

189. Плотность распределения непрерывной случайной величины X задана на всей оси Ox равенством $f(x)=4C/\left(e^x+e^{-x}\right)$. Найти постоянный параметр C.

3.4. Числовые характеристики непрерывных случайных величин

Математическим ожиданием непрерывной случайной величины X, возможные значения которой принадлежат отрезку $[a,b]$, называют определенный интеграл $M(X)=\int_a^b x\,f(x)\,dx.$ Если возможные значения принадлежат всей оси Ox, то $M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\,f(x)\,dx.$

Дисперсией непрерывной случайной величины называют математическое ожидание квадрата ее отклонения.

Если возможные значения X принадлежат отрезку $[a,b]$, то

$$D(X)=\int_a^b x^2 f(x)\,dx-\left[M(X)\right]^2.$$

Если возможные значения принадлежат всей оси x, то

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx-\left[M(X)\right]^2.$$

Среднее квадратическое отклонение непрерывной случайной величины определяется равенством $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$.

Пример 44. Найти математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение случайной величины X, заданной функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 0, \\ x & \text{при} \quad 0 < x \le 1, \\ 1 & \text{при} \quad x > 1. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Найдем плотность распределения:

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x\le 0,\\ 1 & \text{при} \quad 0<x\le 1,\\ 0 & \text{при} \quad x>1.\end{cases}$$

Найдем математическое ожидание по формуле $M(X)=\int_a^b x\,f(x)\,dx$:

$$M(X)=\int_0^1 x\cdot 1\cdot dx=\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1=\frac{1}{2}.$$

Найдем дисперсию: $D(X)=\int_0^1 x^2\cdot 1\cdot dx-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$. Следовательно, среднее квадратическое отклонение равно: $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{\frac{1}{12}}=\frac{\sqrt{3}}{6}$.

Задачи

Плотность вероятности непрерывной случайной величины X задана формулой. Найдите значение параметра a, функцию распределения $F(x)$, числовые характеристики $M(X)$, $D(X)$. Постройте графики функции распределения и функции плотности.

190. $f(x)=a\cos x$, если $|x|\le\frac{\pi}{2}$;

191. $f(x)=\begin{cases}0, \text{ если } x<1,\\ ax^2, \text{ если } 1\le x\le 2,\\ 0, \text{ если } x>2;\end{cases}$

192. $f(x)=\begin{cases}a\left(x^2-3x\right) \text{ при } 1\le x\le 3,\\ 0 \text{ при } x<1 \text{ и } x>3.\end{cases}$

3.5. Показательный закон распределения и его числовые характеристики. Функция надежности

Показательным называют распределение вероятностей непрерывной случайной величины X, которое описывается плотностью

$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x<0,\\ \lambda\cdot e^{-\lambda x} & \text{при } x\ge 0,\end{cases}$ где $\lambda-$постоянная положительная величина.

Функция распределения показательного закона

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x<0,\\ 1-e^{-\lambda x} & \text{при } x\ge 0.\end{cases}$$

Пример 45. Написать плотность и функцию распределения показательного закона, если параметр $\lambda=6$.

Р е ш е н и е. Подставляя $\lambda = 6$ в последние две формулы, получаем, что $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ 6e^{-6x} & \text{при } x \geq 0 \end{cases}$ и $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ 1 - e^{-6x} & \text{при } x \geq 0. \end{cases}$

Вероятность попадания в интервал $(a; b)$ непрерывной случайной величины X, распределенной по показательному закону, $P(a < X < b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$.

Пример 46. Непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону, заданному плотностью вероятности $f(x) = 3e^{-3x}$ при $x \geq 0$, $f(x) = 0$ при $x < 0$. Найти вероятность того, что в результате испытания X попадает в интервал $(0{,}13; 0{,}7)$.

Р е ш е н и е. По условию, $a = 0{,}13, b = 0{,}7, \lambda = 3$. Подставляя данные в формулу $P(a < X < b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$, получаем, что

$$P(0{,}13 < X < 0{,}7) = e^{-3 \cdot 0{,}13} - e^{-3 \cdot 0{,}7} = e^{-0{,}39} - e^{-2{,}1} \approx 0{,}677 - 0{,}122 = 0{,}555.$$

Математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратическое отклонение показательного закона распределения соответственно равны:

$$M(X) = \frac{1}{\lambda}, D(X) = \frac{1}{\lambda^2}, \sigma(X) = \frac{1}{\lambda}.$$

Пример 47. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение показательного закона, заданного функцией распределения $F(x) = 1 - e^{-0{,}4x}$ $(x \geq 0)$.

Р е ш е н и е. Учитывая, что $\lambda = 0{,}4$, получаем, что

$$M(X) = \sigma(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0{,}4} = 2{,}5,\ D(X) = \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{(0{,}4)^2} = \frac{1}{0{,}16} = 6{,}25.$$

Показательным законом надежности называют функцию надежности, определяемую равенством $R(t) = e^{-\lambda t}$, где $\lambda -$ интенсивность отказов.

Эта формула позволяет найти вероятность безотказной работы элемента на интервале времени длительностью t, если время безотказной работы имеет показательное распределение.

Пример 48. Время безотказной работы элемента распределено по показательному закону $f(t) = 0{,}02e^{-0{,}02t}$ при $t \geq 0$ ($t -$ время). Найти вероятность того, что элемент проработает безотказно 100 ч.

Р е ш е н и е. По условию, постоянная интенсивность отказов $\lambda = 0{,}02$. Воспользовавшись формулой $R(t) = e^{-\lambda x}$, получаем, что

$$R(t) = e^{-0{,}02 \cdot 100} = e^{-2} \approx 0{,}13534.$$

Искомая вероятность того, что элемент проработает безотказно 100 ч., приближенно равна 0,14.

Пример 49. Испытывают два независимо работающих элемента. Длительность времени безотказной работы первого элемента имеет показательное распределение $F_1(t)=1-e^{-0,02t}$, второго $F_2(t)=1-e^{-0,05t}$. Найти вероятность того, что за время длительностью $t=6$ ч: а) оба элемента откажут; б) оба элемента не откажут; в) только один элемент откажет; г) хотя бы один элемент откажет.

Решение. а) Вероятность отказа первого элемента:

$$p_1=F_1(6)=1-e^{-0,02\cdot 6}=1-e^{-0,12}=1-0,887=0,113.$$

Вероятность отказа второго элемента:

$$p_2=F_2(6)=1-e^{-0,05\cdot 6}=1-e^{-0,3}=1-0,741=0,259.$$

Искомая вероятность того, что оба элемента откажут, по теореме умножения вероятностей $p_1p_2=0,113\cdot 0,259=0,03$.

б) Вероятность безотказной работы первого элемента:

$$q_1=R_1(6)=e^{-0,02\cdot 6}=e^{-0,12}=0,887.$$

Вероятность безотказной работы второго элемента:

$$q_2=R_2(6)=e^{-0,05\cdot 6}=e^{-0,3}=0,741.$$

Искомая вероятность безотказной работы обоих элементов:

$$q_1\cdot q_2=0,887\cdot 0,741=0,66.$$

в) Вероятность того, что откажет только один элемент:

$$p_1q_2+p_2q_1=0,113\cdot 0,741+0,259\cdot 0,887=0,31.$$

г) Вероятность того, что хотя бы один элемент откажет:

$$P=1-q_1q_2=1-0,66=0,34.$$

Задачи

193. Обычно папа ругает Петю за принесенную «двойку» около 6 мин. На этот раз нотация длится больше 6 мин. Найти математическое ожидание и дисперсию длительности нотации. Определить, с какой вероятностью папа закончит «читать нотацию» в ближайшие минуты?

194. Обычно совещание длится час. На этот раз за час оно не закончится. Какова вероятность того, что оно закончится в ближайшие 15 мин. Длительность совещания распределена по показательному закону.

195. Непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону: $f(x)=\begin{cases} 0, & x<0; \\ 4e^{-4x}, & x\geq 0. \end{cases}$ Найти вероятность того, что в результате испытаний X попадет в интервал $(0,2;0,5)$.

196. За время t расформирования состава через горку – случайная величина, подчиненная показательному закону. Пусть $\lambda=5-$ среднее число поездов, которые горка может расформировать за 1 ч. Определить вероятность того, что время расформирования состав: 1) меньше 30 мин.; 2) больше 6 мин., но меньше 24 мин.

197. Непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону: $f(x)=\begin{cases} 0, & x<0; \\ 2,5e^{-2,5x}, & x\geq 0. \end{cases}$ Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение.

198. Вероятность безотказной работы телевизора распределена по показательному закону $f(t)=0{,}002e^{-0{,}002t}$ $(t>0)$. Найти вероятность того, что телевизор проработает 1000 ч.

199. На шоссе установлен контрольный пункт для проверки технического состояния автомобилей. Найти математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение случайной величины T – времени ожидания очередной машины контролером, если поток машин простейший и время (в часах) между прохождениями машин через контрольный пункт распределено по показательному закону $f(t)=5e^{-5t}$.

200. Длительность времени безотказной работы элемента имеет показательное распределение $F(t)=1-e^{-0{,}01t}$ $(t>0)$. Найти вероятность того, что за время длительностью $t=50$ ч: а) элемент откажет; б) элемент не откажет.

201. Испытывают три элемента, которые работают независимо один от другого. Длительность времени безотказной работы элементов распределена по показательному закону: для первого элемента $F_1(t)=1-e^{-0,1t}$; для второго $F_2(t)=-e^{-0,2t}$; для третьего элемента $F_3(t)=1-e^{-0,3t}$. Найти вероятности того, что в интервале времени $(0, 5)$ ч. откажут: а) только один элемент; б) только два элемента; в) все три элемента; г) хотя бы один элемент; д) не менее двух элементов.

3.6. Закон равномерной плотности. Числовые характеристики

Равномерным называют распределение вероятностей непрерывной случайной величины X, если на интервале (a,b), которому принадлежат все возможные значения X, плотность имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x\leq a,\ x>b, \\ \dfrac{1}{b-a} & \text{при } \ a\leq x\leq b. \end{cases}$$

Пример 50. Цена деления шкалы измерительного прибора равна 0,2. Показания прибора округляют до ближайшего целого деления. Найти вероятность того, что при отсчете будет сделана ошибка большая 0,05.

Р е ш е н и е . Ошибку округления отсчета можно рассматривать как случайную величину X, которая распределена равномерно в интервале между двумя соседними целыми делениями.

Длина интервала, в котором заключены возможные значения X, равна $b-a=0,2.$ Поэтому плотность равномерного распределения будет равна

$$f(x)=\frac{1}{b-a}=\frac{1}{0,2}=5.$$

Ошибка отсчета превысит 0,05, если она будет заключена в интервале $(0,05;0,15)$.

По формуле $P(a<X<b)=\int_a^b f(x)dx$ получим, что

$$P(0,05<X<0,15)=\int_{0,05}^{0,15} 5dx=5\cdot(0,15-0,05)=0,5.$$

Числовые характеристики могут быть найдены по следующим формулам:

$$M(X)=\frac{a+b}{2};\quad D(X)=\frac{(b-a)^2}{12};\quad \sigma(X)=\frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$$

Пример 51. Найти числовые характеристики случайной величины X, распределенной равномерно в интервале $(2,8)$.

Решение. По условию задачи имеем, $a=2, b=8.$ Следовательно,

$$M(X)=\frac{2+8}{2}=5,\ D(X)=\frac{(8-2)^2}{12}=\frac{36}{12}=3,\ \sigma(X)=\frac{8-2}{2\sqrt{3}}=\frac{6}{2\sqrt{3}}=\sqrt{3}.$$

Задачи

202. Автобусы некоторого маршрута идут строго по расписанию. Интервал движения 5 мин. Найти вероятность того, что пассажир, подошедший к остановке, будет ожидать очередной автобус менее 3 мин. Найти среднее время ожидания и среднее квадратическое отклонение времени ожидания.

203. Цена деления шкалы измерительного прибора равна 0,2. Показания прибора округляют до ближайшего целого деления. Найти вероятность того, что при отсчёте будет сделана ошибка, меньшая 0,04.

204. Все значения равномерно распределенной случайной величины лежат на отрезке $[2,8]$. Найти вероятность попадания случайной величины в промежуток $(3,5)$.

205. Поезда данного маршрута городского трамвая идут с интервалом 55 мин. Пассажир подходит к трамвайной остановке в некоторый момент времени. Какова вероятность появления пассажира не ранее чем через минуту после ухода предыдущего поезда, но не позднее, чем за две минуты до отхода следующего поезда?

206. Минутная стрелка электрических часов перемещается скачком в конце каждой минуты. Найти вероятность того, что в данное мгновение часы покажут время, которое отличается от истинного не более, чем на 20 с.

3.7. Нормальный закон распределения

Нормальным называют распределение вероятностей непрерывной случайной величины X, плотность которого имеет вид

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

где a – математическое ожидание, σ – среднее квадратическое отклонение.

Вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу (α,β),

$P(\alpha<X<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right)$, где $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-\frac{x^2}{2}}dx$ (функция Лапласа).

Пример 52. Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение нормально распределенной случайной величины X соответственно равны 10 и 2. Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключенное в интервале $(12,14)$.

Решение. Воспользуемся формулой $P(\alpha<X<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right)$, Подставив $\alpha=12, \beta=14, a=10, \sigma=2,$ получим $P(12<X<14)=\Phi(2)-\Phi(1)$.

По таблице $\Phi(2)=0,4772,$ $\Phi(1)=0,3413.$ Искомая вероятность $P(12<X<14)=0,1359.$

Вероятность того, что абсолютная величина отклонения меньше положительного числа Δ, $P(|X-a|<\Delta)=2\Phi\left(\frac{\Delta}{\sigma}\right)$.

Пример 53. Производится измерение диаметра вала без систематических (одного знака) ошибок. Случайные ошибки измерения X подчинены нормальному закону со средним квадратическим отклонением $\sigma=10$ мм. Найти вероятность того, что измерение будет произведено с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине 15 мм.

Решение. Математическое ожидание случайных ошибок равно нулю, поэтому $P(|X-a|<\Delta)=P(|X|<\Delta)=2\Phi\left(\frac{\Delta}{\sigma}\right)$. Положив $\sigma=10,$ $\Delta=15,$ находим $P(|X|<15)=2\Phi(1,5)=2\cdot 0,4332=0,8664.$

Задачи

207. Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение нормально распределенной случайной величины X соответственно равны 20 и 5. Написать плотность вероятности X, функцию распределения X и найти вероятность того, что X примет значение, заключённое в интервале (15, 25).

208. Размеры диаметров стержней распределены нормально с математическим ожиданием 15 см. и средним квадратическим отклонением 0,4 см. Определите ве-

роятность того, что диаметр стержня: а) не меньше, чем 14 см.; б) заключен в интервале от 14,5 до 15,4 см.

209. Случайная величина X (ошибка измерительного прибора) распределена по нормальному закону с дисперсией 25 мк. Систематическая ошибка прибора отсутствует. Найдите вероятность того, что при четырех независимых измерениях ошибка измерительного прибора хотя бы раз окажется в интервале 0,3 – 6,1 мк.

210. Для производства трубок с внутренним диаметром, равным 0,5 см., требуется некоторая операция. Допустимые отклонения диаметра $\varepsilon = 0{,}02$ см. Предполагается, что внутренний диаметр этих трубок распределен нормально с $\sigma = 0{,}25$ см. Если нормальный диаметр в среднем выдерживается, то: а) каково математическое ожидание числа дефектных образцов в выборке объема 100; б) какова вероятность того, что в этой выборке окажется менее двух дефектных образцов?

211. Средняя масса шоколадных конфет, выпускаемых в коробках кондитерской фабрикой, равна 200 г., среднее квадратическое отклонение 5 г. Считая массу конфет нормально распределенной случайной величиной, найти вероятность того, что масса коробки конфет заключена в пределах от 196 г. до 207 г. Найдите вероятность того, что ровно 5 коробок из 7 проданных имеют массу менее 200 г.

212. Текущая цена акции может быть смоделирована с помощью нормального закона распределения с математическим ожиданием 15 ден. ед. и средним квадратическим отклонением 0,2 ден. ед. Найдите вероятность того, что цена акции а) не выше 15,3 ден. ед.; б) не ниже 15,4 ден. ед.; в) от 14,9 до 15,3 ден. ед. С помощью правила «трёх сигм» найдите границы, в которых будет находиться текущая цена акции.

213. Рост взрослых мужчин в рассматриваемой совокупности является нормально распределенной случайной величиной X. Средний рост мужчин этой совокупности 165 см. 80% мужчин имеет рост от 163 до 167 см. Найдите: а) среднее квадратическое отклонение случайной величины X; б) долю мужчин, рост которых находится в пределах от 162 до 165 см.

214. Коробки с конфетами упаковываются автоматически. Их средняя масса равна 540 г. Известно, что 5% коробок имеют массу, меньшую 500 г. Каков процент коробок, масса которых: а) менее 470 г.; б) от 500 до 550 г.; в) более 550 г.; г) отличаются от средней не более, чем на 30 г. (по абсолютной величине)?

215. Значение теста IQ распределены приблизительно по нормальному закону с математическим ожиданием $a = 100$ и средним квадратичным отклонением $\sigma = 16$. Записать выражения для функции распределения коэффициента интеллекта и плотности его распределения. Найти долю людей, у которых коэффициент интеллекта окажется: а) меньше 60; б) меньше 95; в) меньше 100; г) в пределах от 80 до 120; д) из шести независимо отобранных человек у двоих коэффициент интеллекта будет выше 92.

216. Текущая цена акции может быть приближена нормальным распределением с математическим ожиданием 15,28 руб. и средним квадратичным отклонением 0,12 руб. Рассчитать вероятности того, что цена акции окажется: а) не ниже 15,50 руб.; б) не выше 15,00 руб.; в) между 15,10 руб. и 15,40 руб.; г) между 15,05 руб. и 15,10 руб.

3.8. Закон больших чисел. Неравенства Чебышева и Маркова

Условия, при выполнении которых совокупное действие случайных причин приводит к результату, почти не зависящему от случая, рассматриваются в теоремах, носящих общее название *закона больших чисел*.

Неравенство Чебышева. Вероятность того, что отклонение случайной величины X от ее математического ожидания по абсолютной величине меньше положительного числа ε, не меньшее чем $1-\dfrac{D(X)}{\varepsilon^2}$:

$$P\left(\left|X-M(X)\right|<\varepsilon\right)\geq 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

Пример 54. Устройство состоит из 10 независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента за время T равна 0,05. С помощью неравенства Чебышева оценить вероятность того, что абсолютная величина разности между числом отказавших элементов и средним числом (математическим ожиданием) отказов за время T окажется меньше двух.

Решение. Обозначим через X дискретную случайную величину – число отказавших элементов за время T. Тогда $M(X)=np=10\cdot 0{,}05=0{,}5$; $D(X)=npq=10\cdot 0{,}05\cdot 0{,}95=0{,}475.$

Используя неравенство Чебышева, получаем $P\left(\left|X-0{,}5\right|<2\right)\geq 1-\dfrac{0{,}475}{4}\approx 0{,}88.$

Пример 55. Вероятность появления события A в каждом испытании равна 0,5. Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что число X появлений события A заключено в пределах от 40 до 60, если будет произведено 100 независимых испытаний.

Решение. Найдем математическое ожидание и дисперсию дискретной случайной величины X – числа появлений события A в 100 независимых испытаниях: $M(X)=np=100\cdot 0{,}5=50;\quad D(X)=npq=100\cdot 0{,}5\cdot 0{,}5=25.$

Максимальная разность между заданным числом появлений события и математическим ожиданием $M(X)=50;\ \varepsilon=60-50=10.$

Подставляя данные в неравенство Чебышева, получаем

$$P\left(\left|X-50\right|<10\right)\geq 1-\frac{25}{10^2}=0{,}75.$$

Пример 56. Дискретная случайная величина X задана законом распределения

X	0,3	0,6

P	0,2	0,8

Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что $\left|X - M\left(X\right)\right| < 0,2.$

Решение. Найдем математическое ожидание и дисперсию величины X:

$$M\left(X\right) = 0,3 \cdot 0,2 + 0,6 \cdot 0,8 = 0,54;$$

$$D\left(X\right) = M\left(X^2\right) - \left[M\left(X\right)\right]^2 = \left(0,3^2 \cdot 0,2 + 0,6^2 \cdot 0,8\right) - 0,54^2 = 0,0144.$$

Воспользуемся неравенством Чебышева в форме

$$P\left(\left|X - M(X)\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

Подставляя $M\left(X\right) = 0,54,$ $D\left(X\right) = 0,0144,$ $\varepsilon = 0,2,$ окончательно получаем:

$$P\left(\left|X - 0,54\right| < 0,2\right) \geq 1 - \frac{0,0144}{0,04} = 0,64.$$

Задачи

217. Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что $\left|X - M\left(X\right)\right| < 0,1,$ если $D\left(X\right) = 0,001.$

218. Дано: $P\left(\left|X - M\left(X\right)\right| < \varepsilon\right) \geq 0,9;$ $D\left(X\right) = 0,004.$ Используя неравенство Чебышева, найти $\varepsilon.$

219. Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что случайная величина X отклонится от своего математического ожидания менее чем на три средних квадратических отклонения.

220. В осветительную сеть параллельно включено 20 ламп. Вероятность того, что за время T лампа будет включена, равна 0,8. Пользуясь неравенством Чебышева, оценить вероятность того, что абсолютная величина разности между числом включенных ламп и средним числом (математическим ожиданием) включенных ламп за время T окажется: а) меньше трех; б) не меньше трех.

221. Вероятность появления события в каждом испытании равна $\frac{1}{4}$. Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что число X появлений события заключено в пределах от 150 до 250, если будет произведено 800 испытаний.

222. Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

X	0,1	0,4	0,6
P	0,2	0,3	0,5

Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что $\left|X - M(X)\right| < \sqrt{0,4}.$

3.9. Системы двух случайных величин

Часто результат опыта описывается не одной случайной величиной X, а несколькими случайными величинами.

Двумерной называют случайную величину (X, Y), возможные значения которой есть пары чисел (x, y). Составляющие X и Y, рассматриваемые одновременно, образуют систему двух случайных величин.

Дискретной называют двумерную величину, составляющие которой дискретны. *Непрерывной* называют двумерную величину, составляющие которой непрерывны.

Законом распределения дискретной двумерной случайной величины называют перечень возможных значений этой величины, т.е. пар чисел $\left(x_i, y_j\right)$ и их вероятностей $p\left(x_i, y_j\right)$ $\left(i=1, 2,...,n;\ j=1, 2,..., m\right)$. Обычно закон распределения задают в виде таблицы с двойным входом.

Пример 57. Найти законы распределения составляющих двумерной случайной величины, заданной законом распределения:

Y	X		
	x_1	x_2	x_3
y_1	0,10	0,30	0,20
y_2	0,06	0,18	0,16

Решение. Сложив вероятности по столбцам, получим вероятности возможных значений $X: P\left(x_1\right)=0{,}16; P\left(x_2\right)=0{,}48; P\left(x_3\right)=0{,}36$. Напишем закон распределения составляющей X:

X	x_1	x_2	x_3
P	0,16	0,48	0,36

Т.к. события образуют полную группу, то сумма вероятностей равна единице: 0,16 + 0,48 + 0,36 = 1.

Сложив вероятности по строкам, получим вероятности возможных значений $Y: P\left(y_1\right)=0{,}60; P\left(y_2\right)=0{,}40$. Напишем закон распределения составляющей Y:

Y	y_1	y_2
P	0,60	0,40

Контроль: 0,60 + 0,40 = 1.

Пример 58. В двух ящиках находятся по шесть шаров; в первом ящике 1 шар – с №1, 2 шара – с №2, 3 шара – с №3; во втором ящике: 2 шара – с №1, 3 шара – с №2, 1 шар – с №3. Пусть $X-$номер шара, вынутого из первого ящика, $Y-$номер шара, вынутого из второго ящика. Из каждого ящика вынули по шару. Составить таблицу закона распределения системы случайных величин (X, Y).

Решение. Вероятность появления шара с №1 как из первого, так и из второго ящиков, равна: $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{18}$. Вероятность появления шара с №1 из первого ящика и шара с №2 из второго ящиков равна $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{12}$. Аналогичным образом находятся вероятности остальных сочетаний. Таблица закона распределения системы случайных величин имеет вид:

Y	X		
	1	2	3
1	1/18	1/12	1/36
2	1/9	1/6	1/18
3	1/6	1/4	1/12

Сумма всех вероятностей, указанных в таблице, равна единице.

Функцией распределения двумерной случайной величины (X, Y) называют функцию $F(x, y)$, определяющую для каждой пары чисел x, y вероятность того, что X примет значение, меньшее x, и при этом Y примет значение, меньшее y:

$$F(x, y)=P(X<x, Y<y).$$

Используя функцию распределения, можно найти вероятность попадания случайной точки в прямоугольник $x_1<X<x_2$, $y_1<Y<y_2$:

$$P(x_1<X<x_2, y_1<Y<y_2)=\left[F(x_2, y_2)-F(x_1, y_2)\right]-\left[F(x_2, y_1)-F(x_1, y_1)\right].$$

Пример 59. Задана функция распределения двумерной случайной величины

$$F(x, y)=\begin{cases}\sin x\cdot\sin y, & 0\le x\le \pi/2, \quad 0\le y\le \pi/2,\\ 0, & x<0 \text{ или } y<0.\end{cases}$$

Найти вероятность попадания случайной точки (X, Y) в прямоугольник, ограниченный прямыми $x=0, x=\pi/4, y=\pi/6, y=\pi/3$.

Р е ш е н и е . Используем следующую формулу:

$$P(x_1<X<x_2, y_1<Y<y_2)=\left[F(x_2, y_2)-F(x_1, y_2)\right]-\left[F(x_2, y_1)-F(x_1, y_1)\right].$$

Положив в этой формуле $x_1=0, x_2=\pi/4, y_1=\pi/6, y_2=\pi/3$, получим, что

$$P=\left[\sin\frac{\pi}{4}\cdot\sin\frac{\pi}{3}-\sin 0\cdot\sin\frac{\pi}{3}\right]-\left[\sin\frac{\pi}{4}\cdot\sin\frac{\pi}{6}-\sin 0\cdot\sin\frac{\pi}{6}\right]=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\approx 0,26.$$

Пусть составляющие X и Y дискретны и имеют соответственно следующие возможные значения: $x_1, x_2, ..., x_n$; $y_1, y_2, ..., y_m$.

Условным распределением составляющей X при $Y=y_j$ называют совокупность условных вероятностей $p(x_1|y_j), p(x_2|y_j), \ldots, p(x_n|y_j)$. Аналогично определяется условное распределение Y.

Условные вероятности составляющих X и Y. Вычисляют соответственно по формулам $p(x_i|y_j)=\dfrac{p(x_i, y_j)}{p(y_j)}$, $p(y_j|x_i)=\dfrac{p(x_i, y_j)}{p(x_i)}$.

Пример 60. Дискретная двумерная случайная величина задана таблицей:

Y	X	
	3	6
10	0,25	0,10
14	0,15	0,05
18	0,32	0,13

Найти: а) условный закон распределения X при условии, что $Y=10$; б) условный закон распределения Y при условии, что $X=6$.

Решение. а) Найдем условный закон распределения X при условии, что Y приняла значение $y_1=10$:

$$p\left(x_1 | y_1\right)=\frac{p\left(x_1, y_1\right)}{p\left(y_1\right)}=\frac{0,25}{0,35}=\frac{5}{7}; \quad p\left(x_2 | y_1\right)=\frac{p\left(x_2, y_1\right)}{p\left(y_1\right)}=\frac{0,10}{0,35}=\frac{2}{7}.$$

Напишем искомый условный закон распределения X:

X	3	6
$p\left(X \vert y_1\right)$	5/7	2/7

б) Аналогично найдем условный закон распределения Y при условии, что X приняла значение $x_2=6$:

$$p\left(y_1 | x_2\right)=\frac{p\left(x_2, y_1\right)}{p\left(x_2\right)}=\frac{0,10}{0,28}=\frac{5}{14}, \quad p\left(y_2 | x_2\right)=\frac{p\left(x_2, y_2\right)}{p\left(x_2\right)}=\frac{0,05}{0,28}=\frac{5}{28},$$

$$p\left(y_3 | x_2\right)=\frac{p\left(x_2, y_3\right)}{p\left(x_2\right)}=\frac{0,13}{0,28}=\frac{13}{28}.$$

Напишем искомый условный закон распределения X:

Y	10	14	18
$p\left(Y \vert x_2\right)$	5/14	5/28	13/28

Плотностью совместного распределения вероятностей $f(x, y)$ двумерной непрерывной случайной величины (X, Y) называют вторую смешанную частную производную от функции распределения:

$$f(x, y)=\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}.$$

Пример 61. Найти плотность совместного распределения $f(x, y)$ системы случайных величин (X, Y), если задана функция распределения:

$$F(x, y)=\begin{cases}\left(1-e^{-4x}\right)\cdot\left(1-e^{-2y}\right), & x \geq 0,\ y \geq 0, \\ 0, & x<0 \text{ или } y<0.\end{cases}$$

Р е ш е н и е. Используем формулу $f(x, y) = \dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$. Найдем частные производные: $\dfrac{\partial F}{\partial x} = 4e^{-4x} \cdot \left(1 - e^{-2y}\right)$; $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 8e^{-4x} \cdot e^{-2y}$.

Итак, искомая двумерная плотность вероятности

$$f(x, y) = \begin{cases} 8e^{-4x}e^{-2y}, & x \geq 0,\ y \geq 0, \\ 0, & x < 0 \text{ или } y < 0. \end{cases}$$

Задачи

223. Найти вероятность того, что в результате испытания составляющая X двумерной случайной величины (X, Y) примет значение $X < 2$ и при этом составляющая Y примет значение $Y < 3$, если известна функция распределения системы:

$$F(x, y) = \left(\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{y}{3} + \frac{1}{2}\right).$$

224. Найти вероятность попадания случайной точки (X, Y) в прямоугольник, ограниченный прямыми $x = 1,\ x = 2,\ y = 3,\ y = 5,$ если известна функция распределения $F(x, y) = \begin{cases} 1 - 2^{-x} - 2^{-y} + 2^{-x-y}, & x \geq 0,\ y \geq 0, \\ 0, & x < 0 \text{ или } y < 0. \end{cases}$

225. Дана таблица, определяющая закон распределения системы двух случайных величин (X, Y):

Y	X		
	20	40	60
10	3λ	λ	0
20	2λ	4λ	2λ
30	λ	2λ	5λ

Найти коэффициент λ.

226. Известной функции распределения системы случайных величин (X, Y): $F(x, y) = \sin x \cdot \sin y \quad \left(0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2},\ 0 \leq y \leq \dfrac{\pi}{2}\right)$. Найти: а) плотность совместного распределения $f(x, y)$; б) вероятность попадания случайной точки (X, Y) в прямоугольник, ограниченный прямыми $x = \dfrac{\pi}{6}$, $x = \dfrac{\pi}{2}$, $y = \dfrac{\pi}{4}$ и $y = \dfrac{\pi}{3}$.

227. Найти законы распределения составляющих двумерной случайной величины, заданной законом распределения:

Y	X		
	x_1	x_2	x_3
y_1	0,10	0,30	0,20
y_2	0,06	0,18	0,16

Найти условный закон распределения составляющей X при условии, что составляющая Y приняла значение y_1.

228. Задана дискретная двумерная случайная величина (X, Y):

Y	X		
	x_1	x_2	x_3
$y_1 = 0,4$	0,15	0,30	0,35
$y_2 = 0,8$	0,05	0,12	0,03

Найти: а) безусловные законы распределения составляющих; б) условный закон распределения составляющей X при условии, что составляющая Y приняла значение y_1=0,4; в) условный закон распределения Y при условии $X = x_2 = 5$.

229. Задана дискретная двумерная случайная величина (X, Y):

Y	X	
	3	6
10	0,25	0,10
14	0,15	0,05
18	0,32	0,13

Найти: а) условный закон распределения X при условии, что Y = 10; б) условный закон распределения Y при условии, что X = 6.

230. Задана функция распределения двумерной случайной величины. Найти двумерную плотность вероятности системы (X, Y).

$$F(x,y)=\begin{cases}1-3^{-x}-3^{-y}+3^{-x-y}, x\geq 0, y\geq 0,\\ 0,\ x<0 \text{ или } y<0.\end{cases}$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Гмурман, В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учебное пособие для вузов / В.Е. Гмурман. – М.: Высш. шк., 1999. – 479 с.

2. Гмурман, В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: учебное пособие для студентов вузов / В.Е. Гмурман. – М.: Высш. шк., 2003. – 405 с.

3. Сборник задач по математике для втузов. Ч. 3: Теория вероятностей и математическая статистика: учебное пособие для втузов / под ред. А.В. Ефимова. – 2-е изд. – М.: Наука, 1990. – 428 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ