Самостоятельная работа С6 по теме «Определённые интегралы»

Задача 1. Вычислите определённые интегралы:

1. а) $\int_1^{e^2} \frac{1+2x\ln x}{x^2}dx$; б) $\int_1^{e} \sqrt[3]{x}\ln x\,dx$; в) $\int_0^{2} \sqrt[3]{1+x^2}\,xdx$.
2. а) $\int_0^{1} \frac{x\,dx}{x^2+3x+2}$; б) $\int_1^{e} \frac{dx}{x\left(1+\ln^2 x\right)}$; в) $\int_0^{1} x\operatorname{arctg} x\,dx$.
3. а) $\int_4^{7} \frac{dx}{x\sqrt{x-3}}$; б) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{4+\cos^2 x}$; в) $\int_0^{1} \arcsin x\,dx$.
4. а) $\int_0^{1} \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^6+4}}$; б) $\int_{-1}^{6} \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+2}}$; в) $\int_0^{\pi} x\sin 2x\,dx$.
5. а) $\int_0^{2} (3-2x)e^{-3x}\,dx$; б) $\int_1^{4} \frac{dx}{4+\sqrt{x}}$; в) $\int_0^{1} 3x\sqrt{1-x^2}\,dx$.
6. а) $\int_0^{1} (x-4)\cos\frac{x}{3}dx$; б) $\int_1^{4} \frac{x+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}dx$; в) $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin^3 x}\mathrm{d}x$.
7. а) $\int_{-2}^{2} (1-x)\sin\pi x\,dx$; б) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}}$; в) $\int_e^{e^2} \frac{\sqrt{3+\ln x}}{x}\mathrm{d}x$.
8. а) $\int_0^{1} \frac{dx}{x^2+4x+5}$; б) $\int_3^{10} \frac{xdx}{\sqrt[3]{x-2}}$; в) $\int_3^{8} x\sqrt{x+1}\,dx$.
9. а) $\int_2^{3,5} \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}$; б) $\int_1^{3} 2^x(1+x)dx$; в) $\int_{-1}^{0} \frac{8x^2\,\mathrm{d}x}{1-4x^3}$.
10. а) $\int_0^{4} \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{x}+1}$; б) $\int_{-1}^{0} (2x+3)e^{-x}\,dx$; в) $\int_{\sqrt{3}}^{2} x\sqrt{1+x^2}\,dx$.
11. а) $\int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{x+1}-2}$; б) $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x\,dx}{16+\sin^2 x}$; в) $\int_2^{3} (3-x)e^x\,dx$.
12. а) $\int_3^{4} \frac{dx}{x^2-3x+2}$; б) $\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^x\,dx}{\sqrt{e^{2x}+16}}$; в) $\int_1^{2} x^3\ln x\,dx$.
13. а) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} 8\cos^4 x\,\mathrm{d}x$; б) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\,dx}{1+\cos x}$; в) $\int_1^{e} (6x+2)\ln x\,\mathrm{d}x$.

14. а) $\int_0^1 \operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx$; б) $\int_5^{10} \frac{(x+1)dx}{x\sqrt{x-1}}$; в) $\int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{4+x^2}}$.

15. а) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\cos^2 x\,dx$; б) $\int_3^8 \frac{\sqrt{x+1}\,dx}{x}$; в) $\int_0^1 (2x+1)e^{-x}\,dx$.

16. а) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2+2x+5}$; б) $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$; в) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x\,dx}{\cos^2 x}$.

17. а) $\int_{-0,5}^{0,5} \frac{3^x}{1+9^x}dx$; б) $\int_0^1 e^{2x}(3x-1)dx$; в) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x\,dx$.

18. а) $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}$; б) $\int_1^4 \frac{1+\sqrt{x}}{x^2}dx$; в) $\int_0^1 x\operatorname{arctg} x\,dx$.

19. а) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+18}}$; б) $\int_0^1 (2x+1)\cos\pi x dx$; в) $\int_0^1 \frac{xdx}{(1+x^2)^2}$.

20. а) $\int_0^4 \frac{(x+1)dx}{\sqrt{x}+3}$; б) $\int_0^1 \ln(x^2+1)dx$; в) $\int_0^1 \frac{6x^2dx}{(4+x^3)^2}$.

21. а) $\int_{-1}^0 \frac{18dx}{(1-2x)^3}$; б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\,dx$; в) $\int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^2 \frac{xdx}{\sqrt{x^2-1}}$.

22. а) $\int_0^3 \frac{xdx}{\sqrt{x+1}+5}$; б) $\int_0^1 (x-1)e^{-x}\,dx$; в) $\int_0^{\pi/2} \sin\frac{x}{2}(x+1)dx$.

23. а) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}dx$; б) $\int_1^2 (2-4x)\ln x\,dx$; в) $\int_1^{\sqrt[3]{3}} \sqrt{1+x^3}\,x^2dx$.

24. а) $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cos 2x\,dx$; б) $\int_0^4 \frac{\sqrt{x}}{x+7}dx$; в) $\int_0^1 \frac{8xdx}{\sqrt{1+4x^2}}$.

25. а) $\int_0^1 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$; б) $\int_0^1 \ln(x^2+1)dx$; в) $\int_0^3 x\sqrt{9-x^2}\,dx$.

26. а) $\int_0^{\pi} (2x+3)\cos\frac{x}{3}dx$; б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\,dx$; в) $\int_4^9 \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{x}-1}$.

27. а) $\int_0^{\pi/4} (x+5)\sin 2x\,dx$; б) $\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\,x dx$; в) $\int_0^1 \frac{x^2+3}{x-2}dx$.

28. а) $\int_0^1 \frac{6x\,dx}{\sqrt{1+x^4}}$; б) $\int_0^1 (2x-1)e^{3x}\,dx$; в) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x dx}{1+\cos^2 x}$.

29. а) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3+2x-x^2}}$; б) $\int_{10}^{100} 3^{\lg x}\,\frac{dx}{x}$; в) $\int_0^{\pi/4} (x+3)\cos 2x\,dx$.

30. а) $\int_1^2 \log_2 x\,dx$; б) $\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}(x+5)}$; в) $\int_0^2 \frac{6x\,dx}{4+x^4}$.

Задача 2. Вычислите площадь фигуры, ограниченной кривыми. Сделайте чертёж.

1. $y=2x^2-x+1,\ y=x^2+3x+6.$	2. $y=x^2-3x-1,\ y=-x^2-2x+2.$
3. $y=2x^2-3x-2,\ y=x^2-2x.$	4. $y=3x^2+x-4,\ y=0,\ x=0,\ x=2.$
5. $y=2x^2+x,\ y=x^2-3x+5.$	6. $y=2x^2-5x+1;\ y=-x^2+x+1.$
7. $y=-x^2+2x+3,\ y=0, x=-2,\ x=1.$	8. $y=x^2-3x-4,\ y=-x^2-x+8.$
9. $y=3x^2-x+2,\ y=2x^2-2x+4.$	10. $y=x^2-2x-4,\ y=-x^2-x+2.$
11. $y=x^2+2x-5,\ y=-x^2+x+1.$	12. $y=-x^2-2x+3,\ y=0,\ x+1=0,\ x=3.$
13. $y=2\sqrt{x},\ y=\frac{2}{x},\ x=9.$	14. $y=3\sqrt{x},\ y=\frac{3}{x},\ x=4.$
15. $y=-x^2+2x,\ y=x^2-2x-6.$	16. $y=x^2-4x+3,\ x+y-3=0.$
17. $y=2x-x^2+3,\ y=x^2-4x+3.$	18. $y=4-x^2,\ y=x^2-2x.$
19. $y=x^2-3x-4,\ y=0,\ x=2,\ x=6.$	20. $y=2x^2-7x-7,\ y=-2x^2+x+5$
21. $y=x^2+2x-3,\ y=-x^2+x+3.$	22. $y=-x^2-4x,\ y=0,\ x+3=0,\ x=2.$
23. $y=\sqrt{x-1},\ y=\frac{2}{x},\ x=5.$	24. $y=\sqrt{1-x},\ y+\frac{6}{x}=0,\ x+8=0.$
25. $y=-x^2+2x+1;\ y=x^2-2x-5.$	26. $y=x^2-4x+1,\ x+y+1=0.$
27. $y=2x-x^2+1,\ y=x^2-4x+1.$	28. $y=4x-x^2+2,\ y=x^2-2x+2.$
29. $y=x^2+3x-4,\ y=0,\ x=1,\ x=5.$	30. $y=2x^2-6x-5,\ y=-2x^2+2x+7.$

Задача 3. Тело получено в результате вращения вокруг оси OX фигуры, ограниченной указанными линиями. Нарисуйте тело и найдите его объём.

1. $y = x-1,\quad y = 5-x,\quad x = 1.$	2. $y = x+2,\quad y = 4-x^2.$
3. $y = 2\sin x,\quad y = \sin x,\quad 0 \le x \le \pi/2.$	4. $y = x+1,\quad y = 7-x,\quad x = 0.$
5. $y = x-2,\quad y = 4-x^2.$	6. $y = e^x,\quad y = 1,\quad x = 2.$
7. $x = \sqrt{y},\quad y = 1,\quad x = 2.$	8. $y = 3-2\sin x,\quad y = 1,\quad 0 \le x \le \pi/2.$
9. $y = x+1,\quad y = 4,\quad x = 0.$	10. $y = x,\quad y = 4-4x+x^2.$
11. $y = e^{-x},\quad y = 1,\quad x+2 = 0.$	12. $y = \sqrt{x-1},\quad y = 3,\quad x = 2.$
13. $y = 2\cos x,\quad y = \cos x,\quad 0 \le x \le \pi/2.$	14. $y = 1,\quad y = 5-x,\quad x = 2.$
15. $y+x = 1,\quad y = x^2+2x+1.$	16. $y = e^x,\quad y = e^{2x},\quad x = 1.$
17. $x = \sqrt{y},\quad y = 4,\quad x = 1.$	18. $y = 1+2\sin x,\quad y = 3,\quad 0 \le x \le \pi/2.$
19. $y = x-2,\quad y = 6-x,\quad x = 1.$	20. $y+x = 2,\quad y = x^2+2x+2.$
21. $y = x+1,\quad y = 5-x,\quad x = 1.$	22. $y = x-3,\quad y = 9-x^2.$
23. $y = 2\sin x,\quad y = 1+\sin x,\quad 0 \le x \le \pi/2.$	24. $y = 2x,\quad y+x = 3,\quad y = 1.$
25. $y = x+1,\quad y = 1+x^2.$	26. $y = e^{-x},\quad y = 1,\quad x+2 = 0.$
27. $x = \sqrt{y-2},\quad y = 6,\quad x = 1.$	28. $y = 2-\sin x,\quad y = 2,\quad 0 \le x \le \pi/2.$
29. $y = 3+2x-x^2,\quad y = x+1.$	30. $y+x = 0,\quad y = 4+4x+x^2.$