КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 1

Линейная алгебра

ЗАДАЧА 1

Найти матрицу X из матричного уравнения (решать, используя обратную матрицу).

1.1. $X\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

1.2. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

1.3. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$.

1.4. $X\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

1.5. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

1.6. $X\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1.7. $X\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

1.8. $X\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

1.9. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

1.10. $X\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

ЗАДАЧА 2

Решить систему уравнений методом Гаусса.

2.1. $\begin{cases} 3x + 2y - z = 1, \\ x + 3y + 2z = 5, \\ 5x + 8y + 3z = 11, \\ x + y = 1. \end{cases}$.

2.2. $\begin{cases} x + 2y - 4z = 1, \\ 2x + y - 5z = -1, \\ x - y - z = -2, \\ 4x + 5y - 13z = 1. \end{cases}$.

2.3. $\begin{cases} x - 2y - 3z = -3, \\ x + 3y - 5z = 0, \\ 2x + y - 8z = -3, \\ 5y - 2z = 3. \end{cases}$.

2.4. $\begin{cases} x + 4y - z = 6, \\ 4x + 2y + 3z = -2, \\ 5x + 6y + 2z = 4, \\ 9x + 8y + 5z = 2. \end{cases}$.

2.5. $\begin{cases} 2x + y - z = 3, \\ x + y + z = 2, \\ x - 2z = 1, \\ 3x - y - 9z = 2. \end{cases}$.

2.6. $\begin{cases} x + 3y + 2z = 5, \\ 5x + 8y + 3z = 11, \\ 2x - y - 3z = -4, \\ 4x + 5y + z = 6. \end{cases}$.

2.7. $\begin{cases} 2x + y - 5z = -1, \\ x + 2y - 4z = 1, \\ 5x + y - 11z = -4, \\ y - z = 1. \end{cases}$. **2.8.** $\begin{cases} -x + 2y + 3z = 3, \\ x + 3y - 5z = 0, \\ 2x + 11y - 12z = 3, \\ 5y - 2z = 3. \end{cases}$. **2.9.** $\begin{cases} 2x - y - 7z = 1, \\ 4x - y - 11z = 3, \\ x - 2z = 1, \\ 3x - y - 9z = 2. \end{cases}$.

2.10. $\begin{cases} x + y = 1, \\ x + 3y + 2z = 5, \\ x + 2y + z = 3, \\ 2x + 5y + 3z = 8. \end{cases}$.

Векторная алгебра

ЗАДАЧА 3

Даны вершины треугольника *A*, *B*, *C*. Найти косинус угла *BAC* и площадь треугольника *ABC*.

3.1. *A*(1;–2;3); *B*(0;–1;2); *C*(4;0;4).

3.2. *A*(0;–3;6); *B*(–12;–3;–3); *C*(–9; –3;–6).

3.3. *A*(3;3;–1); *B*(5;5;–2); *C*(4;1; 1).

3.4. *A*(–1;2;–3); *B*(3;4;–6); *C*(1;1;–1).

3.5. *A*(–4;–2;0); *B*(–1;–2;4); *C*(3;–2;1).

3.6. *A*(5;3;–1); *B*(5;2;0); *C*(6;4;–1).

3.7. *A*(–3;–7;–5); *B*(0;–1;–2); *C*(-5;-6;-6).

3.8. *A*(3;3;–1); *B*(1;–5;2); *C*(4;4;1).

3.9. *A*(2;1;–1); *B*(6;–1;–4); *C*(4;2;1).

3.10. *A*(3;–6;9); *B*(0;–3;6); *C*(5;-3;7).

ЗАДАЧА 4

Найти работу силы $\vec{F}$ по перемещению материальной точки из точки *A* в точку *B*.

4.1. $\vec{F} = \{1;2;3\}$; $A(1;-2;0)$; $B(3;4;2)$.

4.2. $\vec{F} = \{3;-2;-5\}$; $A(-1;2;3)$; $B(1;1;2)$.

4.3. $\vec{F} = \{1;-2;3\}$; $A(0;-2;3)$; $B(1;-1;4)$.

4.4. $\vec{F} = \{4;-1;2\}$; $A(-3;2;4)$; $B(-2;4;5)$.

4.5. $\vec{F} = \{-2;4;-3\}$; $A(3;2;2)$; $B(2;3;-4)$.

4.6. $\vec{F} = \{0;-1;3\}$; $A(0;3;-4)$; $B(8;4;2)$.

4.7. $\vec{F} = \{4;4;3\}$; $A(3;4;7)$; $B(3;7;6)$.

4.8. $\vec{F} = \{-4;1;2\}$; $A(1;3;2)$; $B(2;8;3)$.

4.9. $\vec{F} = \{-1;-1;2\}$; $A(-1;3;-5)$; $B(3;-4;3)$.

4.10. $\vec{F} = \{3;-3;-5\}$; $A(2;3;4)$; $B(5;-6;7)$.

Аналитическая геометрия

ЗАДАЧА 5

Даны вершины треугольника *A, B, C*. Найти: 1) уравнение прямой, проходящей через точку *A* параллельно стороне *BC*; 2) уравнение медианы треугольника, проведенной из вершины *B*; 3) длину высоты, опущенной из вершины *C*.

5.1. $A(2;3)$, $B(4;-1)$, $C(-3;-2)$.

5.2. $A(5;1)$, $B(0;3)$, $C(-1;-4)$.

5.3. $A(-3;2)$, $B(1;-2)$, $C(3;3)$.

5.4. $A(0;-3)$, $B(3;0)$, $C(-2;5)$.

5.5. $A(3;0)$, $B(0;3)$, $C(-2;-2)$.

5.6. $A(4;5)$, $B(6;1)$, $C(-1;0)$.

5.7. $A(5;0)$, $B(2;4)$, $C(-3;-2)$.

5.8. $A(2;4)$, $B(-1;1)$, $C(5;-3)$.

5.9. $A(-2;3)$, $B(2;2)$, $C(0;-3)$.

5.10. $A(0;5)$, $B(5;0)$, $C(-2;1)$.

ЗАДАЧА 6

6.1. Найти проекцию точки $P(6;4;7)$ на плоскость $x+y+z-2=0$.

6.2. Найти проекцию точки $P(10;6;7)$ на плоскость $2x+y-z+5=0$.

6.3. Найти проекцию точки $P(-2;11;7)$ на плоскость $-x+2y+z-1=0$.

6.4. Найти проекцию точки $P(10;7;-7)$ на плоскость $-2x-y+2z-4=0$.

6.5. Найти проекцию точки $P(-4;7;5)$ на плоскость $x-2y-z+5=0$.

6.6. Найти проекцию точки $P(-1;2;0)$ на плоскость $4x-5y-z-7=0$.

6.7. Найти проекцию точки $P(2;-1;1)$ на плоскость $x-y+2z-2=0$.

6.8. Найти проекцию точки $P(-2;0;3)$ на плоскость $2x-2y+10z+1=0$.

6.9. Найти проекцию точки $P(3;-3;-1)$ на плоскость $2x-4y-4z-13=0$.

6.10. Найти проекцию точки $\mathrm{P}(-1;0;-1)$ на плоскость $2x+6y-2z+11=0$.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 2

Дифференциальное исчисление

ЗАДАЧА 1

Вычислить производные функций.

1.1. а) $y=(3x^2+10)\cdot\cos x$ б) $y=\dfrac{2x^2}{\cos x}$ в) $y=\sin^4(3x+8)^8$

1.2. а) $y=\operatorname{ctg}x\cdot e^x$ б) $y=\dfrac{\cos x}{1-\sin x}$ в) $y=\ln^4(\sin x^3)$

1.3. а) $y=x^2\cdot\operatorname{tg}x$ б) $y=\dfrac{x}{1-4x^2}$ в) $y=\cos^3 e^{2x-1}$

1.4. а) $y=\cos x\cdot\sin x$ б) $y=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$ в) $y=\cos^2(x-3)^9$

1.5. а) $y=\operatorname{tg}x\cdot(x^3+3)$ б) $y=\dfrac{1}{\cos x}$ в) $y=\operatorname{tg}^4(3x+1)^8$

1.6. а) $y=\sqrt{x}\cdot\sin x$ б) $y=\dfrac{\cos x}{4-x}$ в) $y=e^{\sin(1+4x)^{10}}$

1.7. а) $y=\cos x\cdot(4-x^2)$ б) $y=\dfrac{4x^2}{1+x}$ в) $y=\operatorname{ctg}^{10}e^{3x-1}$

1.8. а) $y=3^x\cdot\sin x$ б) $y=\dfrac{3x^3}{\cos x}$ в) $y=\cos^3(2x+1)^{12}$

1.9. а) $y=2^x\cdot\cos x$ б) $y=3-\dfrac{tgx}{3^x}$ в) $y=\sin^2\ln^5 x$

1.10. а) $y=(x^2-8)\cdot\operatorname{ctg}x$ б) $y=\dfrac{3x^3}{\sin x}$ в) $y=\sin^5(4x-1)^2$

ЗАДАЧА 2

Найти производную от функции, заданной неявно.

2.1. $\sin(x+y)-\ln(x+y)+a=x.$ **2.2.** $\cos y-xy+a=0.$

2.3. $arctg(x+1)+e^y+a=0.$ **2.4.** $\arcsin(x+3)+\sin(x+y)+a=0.$

2.5. $\sqrt{x^2+1}-5xy+a=0.$ **2.6.** $\sin\sqrt{x^2-1}+e^{x+y}+a=0.$

2.7. $xarctgy-x^2+a=0.$ **2.8.** $\cos(x+y)+xy-a=0.$

2.9. $\sin(x+y)+\sqrt{x^2+1}-a=0.$ **2.10.** $x\ln y+x^2+y^2+a=0.$

ЗАДАЧА 3

Найти производную второго порядка от функции, заданной параметрически.

3.1. $\begin{cases} x=\cos t; \\ y=\sin t. \end{cases}$

3.2. $\begin{cases} x=e^t\sin t; \\ y=e^t\cos t. \end{cases}$

3.3. $\begin{cases} x=\dfrac{1}{t+1}; \\ y=e^t. \end{cases}$

3.4. $\begin{cases} x=\ln t; \\ y=t^3. \end{cases}$

3.5. $\begin{cases} x=tgt; \\ y=\sin t. \end{cases}$

3.6. $\begin{cases} x=ctgt; \\ y=\cos t. \end{cases}$

3.7. $\begin{cases} x=t^2+t; \\ y=e^t. \end{cases}$

3.8. $\begin{cases} x=arctgt; \\ y=\dfrac{1}{1+t}. \end{cases}$

3.9. $\begin{cases} x=\arcsin t; \\ y=\ln t. \end{cases}$

3.10. $\begin{cases} x=\sqrt{1+t^2}; \\ y=t^2. \end{cases}$

ЗАДАЧА 4

4.1. Точка движется прямолинейно по закону $S=3t^2-2t+5$. Найти скорость движения точки и ускорение в момент времени $t=5$ *с*.

4.2. Точка движется прямолинейно по закону $S=2t^2-8t-10$. Найти скорость движения точки и ускорение в конце 8 *с*.

4.3. Точка движется прямолинейно по закону $S=2t^3+t^2-4$. Найти величину скорости и ускорения в момент времени $t=4$ *с*.

4.4. Точка движется прямолинейно по закону $S=t^3+5t^2+4$. Найти скорость движения точки и ускорение в момент времени $t=2$ *с*.

4.5. Точка движется прямолинейно по закону $S=\sqrt{t}$. Найти величину скорости и ускорения в момент времени $t=1$ *с*.

4.6. Точка движется прямолинейно по закону $S=t^2+11t+30$. Найти величину скорости и ускорения в момент времени $t=3$ *с*.

4.7. Точка движется прямолинейно по закону $S=6t-t^2$. В какой момент времени скорость точки будет равна нулю?

4.8. Точка движется прямолинейно по закону $S=t^2-8t+4$. В какой момент времени скорость точки будет равна нулю?

4.9. Точка движется прямолинейно по закону $S=4\sin 3t$. Найти скорость движения точки в момент времени $t=\frac{\pi}{9}c$.

4.10. Найти ускорение точки, движущейся прямолинейно по закону $S=\sin 2t$, в момент времени $t=\frac{\pi}{6}$.

ЗАДАЧА 5

Найти предел по правилу Лопиталя.

5.1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x+\dfrac{x^3}{6}}{x^5}$.

5.2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1+\dfrac{x^2}{2}}{x^4}$.

5.3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}$.

5.4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctgx-x}{x^2}$.

5.5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x}{\sin^2 x}$.

5.6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}$.

5.7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\cos x-x}{x^2}$.

5.8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x^2-1}{x^2}$.

5.9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)-x^2}{x^4}$.

5.10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin x-x^2}{x^4}$.

ЗАДАЧА 6

6.1. Сечение тоннеля имеет форму прямоугольника, завершенного полукругом. Периметр сечения 18 м. При каком радиусе полукруга площадь сечения будет наибольшей?

6.2. Через точку $P=(1;4)$ провести прямую так, чтобы сумма длин положительных отрезков, отсекаемых ею на координатных осях, была наименьшей.

6.3. В полукруг радиуса 10 см вписан прямоугольник. Каковы должны быть его размеры, чтобы площадь его была наибольшей?

6.4. Чему должны быть равны катеты прямоугольного треугольника, чтобы он имел наибольшую площадь при длине гипотенузы, равной h?

6.5. Проволокой длиной 20 м требуется огородить клумбу, которая должна иметь форму кругового сектора. Какой следует взять радиус круга, чтобы площадь клумбы была наибольшей?

6.6. Боковые стороны и меньшее основание трапеции равны a см. Определить большее основание так, чтобы площадь трапеции была наибольшей.

6.7. Окно имеет форму прямоугольника, завершенного полукругом. Периметр окна задан и равен P. Каковы должны быть размеры окна, чтобы оно пропускало наибольшее количество света?

6.8. Открытый сосуд состоит из цилиндра, заканчивающегося снизу полусферой. Каковы должны быть размеры сосуда, чтобы при данной вместимости V на его изготовление пошло минимум материала?

6.9. Резервуар имеет форму прямоугольного параллелепипеда (сверху открытого) с квадратным дном. При каких линейных размерах полная поверхность будет наименьшей, если резервуар имеет объем 500 куб. ед.?

6.10. Требуется изготовить прямоугольный ящик (без крышки) с прямоугольным основанием и заданным объемом V, отношение сторон основания которого равнялось бы числу k. Каковы должны быть размеры ящика, чтобы его поверхность была наименьшей?

ЗАДАЧА 7

Провести полное исследование функции $y = f(x)$ и построить ее график.

7.1. $y = \dfrac{x^2 + 2x + 4}{x + 2}$. **7.2.** $y = \dfrac{x^2 - 4x + 7}{x - 3}$. **7.3.** $y = \dfrac{x^2 - x - 1}{x + 1}$.

7.4. $y = \dfrac{x^2 - 2x + 9}{x - 2}$. **7.5.** $y = \dfrac{x^2 + 3x + 4}{x}$. **7.6.** $y = \dfrac{x^2 - 6x + 10}{x - 3}$.

7.7. $y = \dfrac{x^2 + 2x + 8}{x + 4}$. **7.8.** $y = \dfrac{x^2 - 2x + 8}{x - 4}$. **7.9.** $y = \dfrac{x^2 - 3x + 6}{x - 5}$.

7.10. $y = \dfrac{x^2 + 4x + 4}{x + 5}$.

ЗАДАЧА 8

Найти градиент и производную по направлению вектора $\vec{l}$ функции $u = f(x, y, z)$ в точке M.

8.1. $u = x^3yz,$ $\vec{l} = (2,3,-1),$ $M = (1,-1,3).$

8.2. $u = x^2 - 3yz + 5,$ $\vec{l} = (1,-2,-1)$ $M = (1,2,-1).$

8.3. $u = x + \ln(y^2 + z^2),$ $\vec{l} = (-2,4,-3),$ $M = (2,1,1).$

8.4. $u = x^3 + \sqrt{y^2 + z^2},$ $\vec{l} = (2,-3,3),$ $M = (1,-3,4).$

8.5. $u = x^3y + xz^3 + xyz,$ $\vec{l} = (1,-2,3)$ $M = (1,1,1).$

8.6. $u = x^2 + 2y^2 + z^3,$ $\vec{l} = (-3,2,-2)$ $M = (1,3,2).$

8.7. $u = xy + yz + zx,$ $\vec{l} = (3,4,12)$ $M = (2,1,3).$

8.8. $u = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}},$ $\vec{l} = (2,-3,4),$ $M = (0,-3,4).$

8.9. $u = x^2y - \sqrt{xy + z^2},$ $\vec{l} = (2,-2,5),$ $M = (1,5,-2).$

8.10. $u = xz^2 - \sqrt{x^3y},$ $\vec{l} = (2,1,-3)$ $M = (2,2,4).$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 3

Интегралы

ЗАДАЧА 1

Вычислить интегралы.

1.1. *а)* $\int \frac{3-7x}{\sqrt{1-4x^2}}dx$; *б)* $\int x\sin 2x\,dx$; *в)* $\int \frac{3dx}{\sqrt{x^2-6x+8}}$; *г)* $\int \frac{x^3+4}{x^2-x}dx$.

1.2. *а)* $\int \frac{5-3x}{\sqrt{2x^2+1}}dx$; *б)* $\int x\cos 3x\,dx$; *в)* $\int \frac{2dx}{x^2+4x+25}$; *г)* $\int \frac{x^4-2}{x^2+2x}dx$.

1.3. *а)* $\int \frac{6x+1}{2x^2-1}dx$; *б)* $\int (x+2)e^x\,dx$; *в)* $\int \frac{4dx}{\sqrt{x^2+4x+1}}$; *г)* $\int \frac{x^3+1}{x^2-x}dx$.

1.4. *а)* $\int \frac{5-3x}{\sqrt{4-3x^2}}dx$; *б)* $\int \arcsin x\,dx$; *в)* $\int \frac{dx}{x^2-4x+15}$; *г)* $\int \frac{x^3+1}{x^3-x^2}dx$.

1.5. *а)* $\int \frac{3x+2}{1+2x^2}dx$; *б)* $\int arctgx\,dx$; *в)* $\int \frac{3dx}{\sqrt{x^2+5x+1}}$; *г)* $\int \frac{2x^3+1}{x^2(x+1)}dx$.

1.6. *а)* $\int \frac{1+3x}{\sqrt{1+4x^2}}dx$; *б)* $\int x^2\ln x\,dx$; *в)* $\int \frac{2dx}{x^2-2x+5}$; *г)* $\int \frac{x^3+2}{x^2-4x}dx$.

1.7. *а)* $\int \frac{1-5x}{1+25x^2}dx$; *б)* $\int (3-2x)\sin 3x\,dx$; *в)* $\int \frac{4dx}{\sqrt{x^2+6x+8}}$; *г)* $\int \frac{3x^3-2}{x^2-x}dx$.

1.8. *а)* $\int \frac{2x-1}{\sqrt{3x^2-4}}dx$; *б)* $\int x\sin 2x\,dx$; *в)* $\int \frac{dx}{x^2-6x+8}$; *г)* $\int \frac{2x^3+5x^2-1}{x^3+x^2}dx$.

1.9. *а)* $\int \frac{4x-3}{3x^2-4}dx$; *б)* $\int x\,arctgx\,dx$; *в)* $\int \frac{3dx}{x^2-4x+1}$; *г)* $\int \frac{2x^3+2x^2+4x+3}{x^3+x^2}dx$.

1.10. *а)* $\int \frac{1-3x}{4x^2-1}dx$; *б)* $\int x^2\ln(1+x)\,dx$; *в)* $\int \frac{2dx}{x^2-4x+10}$; *г)* $\int \frac{x^3-4x^2+2x-1}{x^3-x^2}dx$.

ЗАДАЧА 2

Вычислить интеграл.

2.1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^3 x}\sin x\,dx$. **2.2.** $\int_0^{\pi} \sin^3 x\cos^2 x\,dx$. **2.3.** $\int_0^{\pi} \sin^2 x\cos^3 x\,dx$.

2.4. $\int\limits_0^{\pi/4} tg^2 x\, dx$. **2.5.** $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \sin^4 x dx$. **2.6.** $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x \sin^3 x dx$.

2.7. $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} ctg^2 x\, dx$. **2.8.** $\int\limits_0^{\pi} \sin^3 x \cos^3 x\, dx$. **2.9.** $\int\limits_0^{\pi} \sin^5 x\, dx$. **2.10.** $\int\limits_0^{\pi} \cos^5 x\, dx$.

ЗАДАЧА 3

Найти площадь фигуры, ограниченной линиями.

3.1. $y = (x-1)^2;\ y = -x+3$. **3.2.** $y = x^2;\ y = 3x$. **3.3.** $y = x^2 + x;\ y = x+1$.

3.4. $y = -(x+1)^2;\ y = -2x-5$. **3.5.** $y = (x+2)^2;\ y = 5x+6$.

3.6. $y = -(x-1)^2;\ y = 2x-5$. **3.7.** $y = (x+3)^2;\ y = 3x+9$.

3.8. $y = (x+2)^2;\ y = 4$. **3.9.** $y = 4x^2;\ y = x^4$. **3.10.** $y = -x^2;\ y = -x-6$.

ЗАДАЧА 4

Вычислить.

4.1. $\iint\limits_D \left(12x^2y^2 + 16x^3y^3\right)dxdy;\quad D: x = 1,\ y = x^2,\ y = -\sqrt{x}.$

4.2. $\iint\limits_D \left(\frac{4}{5}xy + 9x^2y^2\right)dxdy;\quad D: x = 1,\ y = -x^3,\ y = \sqrt{x}.$

4.3. $\iint\limits_D \left(4xy + 16x^3y^3\right)dxdy;\quad D: x = 1,\ y = -x^3,\ y = \sqrt[3]{x}.$

4.4. $\iint\limits_D \left(6xy + 24x^3y^3\right)dxdy;\quad D: x = 1,\ y = -x^2,\ y = \sqrt{x}.$

4.5. $\iint\limits_D \left(18x^2y^2 + 32x^3y^3\right)dxdy;\quad D: x = 1,\ y = x^3,\ y = -\sqrt{x}.$

4.6. $\iint\limits_D \left(9x^2y^2 + 48x^3y^3\right)dxdy;\quad D: x = 1,\ y = -x^2,\ y = \sqrt{x}.$

4.7. $\iint\limits_D \left(44xy + 16x^3y^3\right)dxdy;\quad D: x = 1,\ y = x^2,\ y = -\sqrt[3]{x}.$

4.8. $\iint\limits_D \left(xy - 4x^3y^3\right)dxdy;\quad D: x = 1,\ y = x^3,\ y = -\sqrt{x}.$

4.9. $\iint\limits_D \left(8xy + 18x^2y^2\right)dxdy; \quad D: x = 1,\ y = -x^2,\ y = \sqrt[3]{x}.$

4.10. $\iint\limits_D \left(27x^2y^2 + 48x^3y^3\right)dxdy; \quad D: x = 1,\ y = x^2,\ y = -\sqrt[3]{x}.$

ЗАДАЧА 5

5.1. Скорость распада радия пропорциональна его наличному количеству. Первоначальный запас радия равен M. Известно, что по истечении 1600 лет останется половина первоначального запаса. Найти, сколько радия окажется нераспавшимся по истечении 800 лет.

5.2. Скорость размножения некоторых бактерий пропорциональна количеству x бактерий, имеющихся в наличии в рассматриваемый момент t. Количество бактерий в начальный момент было x_0. Найти зависимость количества бактерий от времени, если известно, что через 5 часов количество бактерий увеличилось в три раза.

5.3. Тело массой $m = 2$ кг движется прямолинейно под действием силы F, возрастающей на 3 Н в секунду. В начальный момент сила F равна 4 Н, скорость равна 10 м/с.

Найти зависимость скорости от времени.

5.4. Определить путь S, пройденный телом за время t, если его скорость пропорциональна проходимому пути и, если тело проходит 100 м в 10 секунд и 200 м в 15 секунд.

5.5. Корабль замедляет свое движение под действием силы сопротивления воды, которая пропорциональна скорости корабля. Начальная скорость корабля 10 м/с, скорость его через 5 секунд станет 8 м/с. Когда скорость уменьшится до 1 м/с?

5.6. Скорость охлаждения тела в воздухе пропорциональна разности температур тела и воздуха (коэффициент пропорциональности $k = 0{,}5$). Найти зависимость температуры тела T от времени t, если температура тела в начальный момент времени равна 80°, а температура воздуха 20°.

5.7. Скорость распада радиоактивного вещества пропорциональна его наличному количеству. За 30 дней распалось 50% первоначального количества радиоактивного вещества. Через сколько времени останется 1% от его первоначального количества?

5.8. Тело массой $m = 3$ кг замедляет свое движение под действием силы сопротивления, которая пропорциональна кубу его скорости (коэффициент пропорциональности $k = 3$). Начальная скорость тела равна 10 м/с. Какой будет скорость тела в момент времени t?

5.9. Тело массой $m=1$ кг движется прямолинейно под действием силы, пропорциональной времени (коэффициент пропорциональности $k=20$), отсчитываемого от момента $t=0$, и обратно пропорциональной скорости движения точки.

Какова будет скорость в момент времени t, если в момент $t=10$ с скорость $v=50$ м/с?

5.10. Тело движется прямолинейно с ускорением, пропорциональным произведению скорости движения v на время t. Установить зависимость между скоростью и временем, если при $t=0$ скорость $v=v_0$.

ЗАДАЧА 6

Найти общие решения дифференциальных уравнений:

6.1. *а)* $x\sqrt{1+y^2}dx+y\sqrt{1+x^2}dy=0$; *б)* $y'-\dfrac{y}{x}=x^2$.

6.2. *а)* $x\sqrt{3+y^2}dx+y\sqrt{2+x^2}dy=0$; *б)* $y'+\dfrac{y}{x}=x^2$.

6.3. *а)* $x\sqrt{4+y^2}dx-y\sqrt{x^2+1}dy=0$; *б)* $y'-\dfrac{y}{x}=x$.

6.4. *а)* $x\sqrt{3+y^2}dx-y\sqrt{4+x^2}dy=0$; *б)* $y'+\dfrac{y}{x}=x$.

6.5. *а)* $\sqrt{3+y^2}dx+y\sqrt{1-x^2}dy=0$; *б)* $y'-\dfrac{y}{x}=x^2+1$.

6.6. *а)* $\sqrt{2+y^2}dx-y\sqrt{4-x^2}dy=0$; *б)* $y'+\dfrac{y}{x}=x^2-2$.

6.7. *а* $x\sqrt{5+y^2}dx-y\sqrt{3+x^2}dy=0$); *б)* $y'-\dfrac{y}{x}=x^3+1$.

6.8. *а)* $x\sqrt{4-y^2}dx-\sqrt{5+x^2}dy=0$; *б)* $y'+\dfrac{y}{x}=x^3$.

6.9. *а)* $x\sqrt{1+y^2}dx+\sqrt{3+x^2}dy=0$; *б)* $y'-\dfrac{y}{x}=x^4-1$.

6.10. *а)* $x\sqrt{5+y^2}dx-y\sqrt{6+x^2}dy=0$; *б)* $y'+\dfrac{2y}{x}=x^3$.

ЗАДАЧА 7

Найти работу силы $\vec{F} = \{P(x,y);Q(x,y)\}$ при перемещении вдоль отрезка BC от точки B к точке C.

7.1. $P(x,y) = y,\ Q(x,y) = y - x,\ B(-1;0),\ C(0;1).$

7.2. $P(x,y) = 2xy,\ Q(x,y) = x^2,\ B(0;0),\ C(2;1).$

7.3. $P(x,y) = xy,\ Q(x,y) = y + x,\ B(0;0),\ C(1;1).$

7.4. $P(x,y) = y,\ Q(x,y) = y - x,\ B(-2;0),\ C(0;2).$

7.5. $P(x,y) = x^2 y,\ Q(x,y) = y,\ B(-1;0),\ C(0;1).$

7.6. $P(x,y) = y,\ Q(x,y) = y + x,\ B(0;0),\ C(1;1).$

7.7. $P(x,y) = 2xy,\ Q(x,y) = x^2,\ B(0;0),\ C(1;2).$

7.8. $P(x,y) = 3xy,\ Q(x,y) = x - y,\ B(0;0),\ C(2;2).$

7.9. $P(x,y) = x^2 y,\ Q(x,y) = y,\ B(-2;0),\ C(0;2).$

7.10. $P(x,y) = 2xy,\ Q(x,y) = x^2,\ B(0;0),\ C(1;3).$