

ЗАДАЧНИК ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ (1 СЕМЕСТР)

Введение в анализ

Найдите область определения функции.

1. $y = \sqrt{4 - x^2}$.

2. $y = \sqrt{x - 5} + \sqrt{2 - x}$.

3. $y = \sqrt{x^2 + 10x + 16}$.

4. $y = \arccos(2x + 1)$.

5. $y = \ln(2 - x)$.

6. $y = \log_2(3 - x) + 2\log_x 5$.

7. $y = \frac{\log_5(x^2 + 4x)}{\sqrt{9 - x^2}}$.

Установите четность или нечетность функции.

8. $y = \cos 2x + x \sin x$.

9. $y = |x| - 3$.

10. $y = |x + 1| + 2$.

11. $y = \log_2(x^2 - 4)$.

12. $y = x^2 \sin 3x$.

13. $y = \cos 2x + \operatorname{tg}^2 x$.

Постройте линии, заданные уравнениями.

14. $y = 2x + 8$.

15. $y = |2x - 1|$.

16. $y = x^2 - 5x + 6$.

17. $y = x^2 - 5|x| + 6$.

18. $y = |x^2 - 5x + 6|$.

19. $|y| = x - 1$.

20. $|y| = x^2 + 3x + 2$.

21. $y = \frac{x + 5}{x + 1}$.

22. $y = \sqrt{4x + 8}$.

23. $y = \sin 3x$.

24. $y = 3\cos 2x - 4$.

25. $y = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

26. $y = 2^{x+1}$.

27. $y = \log_2(x - 1)$.

28. $|y| = \log_2 x$.

Вычислите пределы.

29. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^3 - 2x - 1}{x^4 + 4x^2 - 5}$.

30. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 2x + 10}{x^5 - x^2 - 5}$.

31. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 2x - 1}{2x^4 + 4x^2 - 5}$.

32. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 7x + 6}{x^2 + 4x + 7}$.

33. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 - 2x - 1}{x^4 + 4x^2 - 5}$.

34. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - x + 7}{x^2 + x - 3}$.

35. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n - 4)^2 + (n + 3)^2}{3n^2 + 5}$.

36. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n + 2)^3 + (n - 3)^3}{4n^3 + n + 3}$.

37. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n + 1)^3 - (n + 2)^3}{n^3 - 9n + 4}$.

38. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x + 4}{x^2 + 2x - 1}$.

39. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 2x - 1}{x^4 + 4x^2}$.

40. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x - 1}{x^3 + 8}$.

41. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 4x - 5}$.
42. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - x - 2}{x^2 - 4x + 3}$.
43. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 5x + 2}{x^2 - 4x + 4}$.
44. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 2x - 1}{x^4 + 4x^2 - 5}$.
45. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2x^2 - 3x - 2)^2}{x^3 + x^2 - 3x - 6}$.
46. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 5x^2 + 7x - 3}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}$.
47. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 4x^2 - 3x + 18}{x^3 - 5x^2 + 3x + 9}$.
48. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 + 7x^2 + 15x + 9}{x^3 + 8x^2 + 21x + 18}$.
49. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{3x + 1}}{x^2 + x}$.
50. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x + 5} - 2}$.
51. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 5x + 4}{\sqrt{x + 8} - 3}$.
52. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{10 + 2x} - \sqrt{1 - x}}{x^2 + x - 6}$.
53. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{1 + 4x} - 3}{\sqrt{1 + x} - \sqrt{3}}$.
54. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{8 + x} - \sqrt[3]{8 - x}}{2x^2 + x}$.
55. $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{\sqrt[3]{\frac{x}{9} - \frac{1}{3}}}{\sqrt{\frac{1}{3} + x} - \sqrt{2x}}$.
56. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{10 + x} - \sqrt{1 + x})$.
57. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x + 3} - \sqrt{x + 1})$.
58. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 3x} - \sqrt{x^2 + 2})$.
59. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{\frac{5}{x}}$.
60. $\lim_{x \rightarrow 1} (2x - 1)^{\frac{1}{x-1}}$.
61. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x + 2}{4x - 1} \right)^{\frac{x+1}{3}}$.
62. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x - 2}{3x + 5} \right)^{4x+1}$.
63. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 - x + 7}{2x^2 - x - 1} \right)^{-2x+1}$.
64. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + x - 7}{x^2 - 3x - 1} \right)^{4x+1}$.
65. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{4x + 2}{3x - 7} \right)^{x-5}$.
66. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{5x^2 + 7}{2x^2 - 3x} \right)^{1-x}$.
67. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2 - 7}{2x^2 - x - 1} \right)^{2x+1}$.
68. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{2x - 7}{8x - 1} \right)^{3-2x}$.
69. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \ln(1 + x))^{\frac{2}{x}}$.
70. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(5 - \frac{4}{\cos x} \right)^{\frac{1}{\sin^2 3x}}$.
71. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 2x}{x} \right)^{1+x}$.
72. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{11x + 8}{12x + 1} \right)^{\cos^2 x}$.
73. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x}{\operatorname{arctg} 7x}$.
74. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 5x}{x(e^{3x} - 1)}$.
75. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{e^{3x^2} - 1}$.

$$76. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln^4(1-2x)}{(1-\cos x)^2}.$$

$$77. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 1}{\sin 2x}.$$

$$78. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin^3 2x}{(1-\cos 5x)^2}.$$

$$79. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{3x+1}}{\cos \frac{\pi(x+1)}{2}}.$$

$$80. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(e^{\pi x} - 1)}{3(\sqrt[3]{1+x} - 1)}.$$

$$81. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\cos 4x - \cos 5x}.$$

Исследуйте функцию на непрерывность. Постройте схематически график.

$$88. y = \frac{x^2 - 2x}{x - 2}.$$

$$89. y = \operatorname{arctg} \frac{1}{4-x}.$$

$$90. y = \operatorname{arctg} \frac{2}{x+1}.$$

$$91. y = \frac{3x-1}{x+3}.$$

$$92. y = \frac{x^2 - 3x}{x-4}.$$

$$93. y = \frac{|x-2|}{x-2}.$$

$$94. y = \frac{x+2}{x^2 - 2x}.$$

$$95. y = \frac{x}{x^2 - 2x}.$$

$$82. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \arcsin 3x}{\operatorname{tg}(\pi(x+1))}.$$

$$83. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\ln x}.$$

$$84. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 3x}{\sin 2x}.$$

$$85. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin 7\pi x}{\sin 8\pi x}.$$

$$86. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(5-2x)}{\sqrt{10-3x} - 2}.$$

$$87. \lim_{x \rightarrow 0} (e^{x^2} - 1) \operatorname{ctg}^2 2x.$$

$$96. y = \begin{cases} x+2, & x < 0, \\ x^2 - 1, & x \geq 0; \end{cases}$$

$$97. y = \begin{cases} x, & x \leq -1, \\ \frac{3}{x+1}, & x > -1; \end{cases}$$

$$98. y = \begin{cases} x+4, & x \leq -2, \\ 3x+8, & x > -2. \end{cases}$$

$$99. y = \begin{cases} \frac{5}{x}, & x < 0, \\ x^2, & 0 \leq x < 3, \\ x+8, & x \geq 3. \end{cases}$$

Производная и ее применение

Найдите производные функций.

1. $y = \frac{\arcsin x}{x^3 - 3x}$.

2. $y = \frac{8^x}{\sqrt[3]{x^2}}$.

3. $y = x \ln x + \arcsin \sqrt{x}$.

4. $y = \frac{7x^2 - 3x}{\log_2 x}$.

5. $y = \sqrt{\operatorname{arctg} x}$.

6. $y = \ln \operatorname{tg} \frac{2x+1}{4}$.

7. $y = \sqrt{5x^3 + 9 \operatorname{tg} x}$.

8. $y = \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \sqrt{2x}$.

9. $y = (x^3 + \sin x) \log_3^2 x$.

10. $y = \frac{3 \cos^2 x}{x^2 - 7x + 2}$.

11. $y = e^{8x^2+3} \operatorname{ctg} x$.

12. $y = \ln \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}$.

13. $y = \sin 2x - \cos^2 x$.

14. $y = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x + \frac{1}{6} \operatorname{tg}^3 2x + \frac{1}{2} \operatorname{tg} 2x$.

15. $y = \sqrt{3x + \cos 3x}$.

16. $y = \operatorname{tg}^8 \frac{x}{8}$.

17. $y = \ln(x + \sqrt{x^2 - 3})$.

18. $y = \ln \frac{x+2}{x-2}$.

19. $y = 3^{\cos^2 x}$.

20. $y = \ln 2^{\sin^2 x}$.

21. $y = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}}$.

22. $y = \frac{1}{6\sqrt{2}} \arcsin \frac{x^3}{\sqrt{8}}$.

23. $y = \ln \ln x$.

24. $y = \ln \frac{x^2}{1-x^2}$.

25. $y = \ln(3x^2 + \sqrt{9x^4 + 1})$.

26. $y = \frac{1}{2}(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x)$.

27. $y = \frac{1}{2} e^{x^2} (\sin 2x + \cos 2x)$.

28. $y = \frac{2^x}{\ln 2} \left(\ln x - \frac{1}{x} \right)$.

29. $y = \frac{1}{6} \sin^3 x^2$.

30. $y = \operatorname{tg}^3 \frac{x}{3}$.

31. $y = \frac{3}{\left(1 + \cos \frac{x}{3}\right)^2}$.

32. $y = 2^{3x^2} + \ln \sin x$.

33. $y = \sqrt{x} e^{\sqrt{x}}$.

34. $y = \ln \sin(3x + 2)$.

35. $y = \frac{e^{-x^2}}{x-3}$.

36. $y = \ln \operatorname{arctg} \sqrt{1+x^2}$.

37. $y = \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \ln \sqrt{1-x^2}$.

38. $y = (2x + \sin 2x)^3$.

39. $y = \sqrt[3]{(1+x^5)^2}$.

40. $y = \frac{2}{15\sqrt{1+x}}$.

41. $y = x - \ln(2 + e^x)$.

42. $y = \frac{2}{3} \sqrt{\operatorname{arctg}^5 3x}$.

43. $y = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{e^x - 3}{2}$.

$$44. y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

$$45. y = \arcsin e^x - \sqrt{1 - e^{2x}}.$$

$$46. y = \ln \log_5 \operatorname{tg} x.$$

$$47. y = x^2 \cos^2 12x.$$

$$48. y = \frac{\cos^2 3x}{4 \sin 4x}.$$

$$49. y = \frac{\sqrt{1 + x^2} - 1}{x}.$$

$$50. y = \sqrt{x} + \frac{1}{3} \arccos \sqrt{x} + \frac{8}{3} \operatorname{arctg} \sqrt{x}.$$

$$51. y = e^{(x^2 + 1) \cos x}.$$

$$52. y = 2^{\sin x^3}.$$

$$53. y = x^5 - e^{-x} \arcsin x - \ln(1 + \sqrt{1 + x^2}).$$

$$54. y = (\sin x)^{\cos x}.$$

$$55. y = (x + 1)^{\frac{2}{x}}.$$

$$56. y = (x^2 + 1)^{\sin x}.$$

$$57. y = \frac{(x - 2)^2 \sqrt[3]{x + 1}}{(x - 5)^3}.$$

$$58. y = \sqrt[3]{\frac{x(x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^2}}.$$

$$59. y = \sqrt{x \sin x \sqrt{1 - e^x}}.$$

Найдите производные второго порядка функций.

$$60. y = \sin^2 x.$$

$$61. y = -\frac{3}{3x^2 - 5}.$$

$$62. y = \operatorname{tg} x.$$

Найдите производные указанного порядка.

$$63. y = x \ln x, y'''.$$

$$64. y = x e^{-x}, y'''.$$

$$65. y = \arcsin x, y^{IV}.$$

Найдите производные n -ного порядка функций.

$$66. y = \sin x.$$

$$67. y = \ln x.$$

$$68. y = 2^x + 2^{-x}.$$

69. Покажите, что функция $y = e^x + 2e^{2x}$ удовлетворяет уравнению $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$.

Составьте уравнения касательной и нормали к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0 .

$$70. y = 4 + x^2, x_0 = 2.$$

$$71. y = \frac{1}{3}x^3 - 4x + 1, x_0 = 3.$$

$$72. y = \frac{8}{4 + x^2}, x_0 = 2.$$

73. Составьте уравнения касательных к графику функции $y = 4x - x^2$ в точках пересечения с осью Ox .

74. Составьте уравнение нормали к линии $y = 2 - \sqrt{x}$ в точке ее пересечения с биссектрисой первого координатного угла.

75. Покажите, что касательные, проведенные к гиперболе $y = \frac{x-4}{x-2}$ в точках ее пересечения с координатными осями, параллельны между собой.

76. Докажите, что касательные к линии $y = \frac{1+3x^2}{3+x^2}$, проведенные в точках, для которых $y = 1$, пересекаются в начале координат.

Найдите производные от y по x .

$$77. \begin{cases} x = 1 - t^2, \\ y = 1 - t^3. \end{cases}$$

$$78. \begin{cases} x = \frac{t+1}{t}, \\ y = \frac{t-1}{t}. \end{cases}$$

$$79. \begin{cases} x = \ln(1+t^2), \\ y = t - \operatorname{arctg} t. \end{cases}$$

$$80. \begin{cases} x = e^t \sin t, \\ y = e^t \cos t. \end{cases}$$

Найдите производные второго порядка $\frac{d^2 y}{dx^2}$.

$$81. \begin{cases} x = at^2, \\ y = bt^3. \end{cases}$$

$$82. \begin{cases} x = a \cos t, \\ y = a \sin t. \end{cases}$$

$$83. \begin{cases} x = \ln t, \\ y = t^2 - 1. \end{cases}$$

Найдите производные третьего порядка $\frac{d^3 y}{dx^3}$.

$$84. \begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t. \end{cases}$$

$$85. \begin{cases} x = a \cos^3 t, \\ y = b \sin^3 t. \end{cases}$$

86. Покажите, что функция $y = f(x)$, заданная параметрически уравнениями

$$\begin{cases} x = e^t \sin t, \\ y = e^t \cos t, \end{cases} \text{ удовлетворяет соотношению } y''(x+y)^2 = 2(xy' - y).$$

Составьте уравнения касательной и нормали к данной линии в указанной точке.

$$87. \begin{cases} x = 2e^t, \\ y = e^{-t}, \end{cases} t_0 = 0.$$

$$89. \begin{cases} x = 2 \ln \operatorname{ctg} t + 1, \\ y = \operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t \end{cases}, t_0 = \frac{\pi}{4}.$$

$$88. \begin{cases} x = \sin t, \\ y = \cos 2t, \end{cases} t_0 = \frac{\pi}{6}.$$

Найдите производную от функции y , заданной неявно.

$$90. x^4 + y^4 = x^2 y^2.$$

$$92. 2y \ln y = x.$$

$$91. \sin(xy) + \cos(xy) = \operatorname{tg}(x+y).$$

$$93. 2^x + 2^y = 2^{x+y}.$$

94. $x - y = \arcsin x - \arcsin y$.

95. Найдите $\frac{d^2 y}{dx^2}$: 1) $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$; 2) $e^{x+y} = xy$; 3) $y^3 + x^3 - 3axy = 0$.

96. Найдите $\frac{d^3 y}{dx^3}$: 1) $x^2 - xy + y^2 = 1$; 2) $y = \operatorname{tg}(x + y)$.

97. Найдите производные первого, второго и третьего порядков в точке $M(3; 4)$ от функции $y = y(x)$, заданной уравнением $x^2 + y^2 = 25$.

98. Найдите $\frac{d^2 y}{dx^2}$ от функции, заданной уравнением $e^y + xy = e$, при $x = 0$.

99. Составьте уравнения касательной к линии $x^2(x + y) = a^2(x - y)$ в начале координат.

100. Составьте уравнения касательной и нормали к кривой $xy + \ln y = 1$ в точке $M(1; 1)$.
Найдите дифференциал функции.

101. $y = \operatorname{tg}^2 x$.

102. $y = \sqrt{\arcsin x} + (\operatorname{arctg} x)^2$.

Найдите интервалы монотонности и точки экстремума функции.

103. $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 9$.

108. $y = \frac{3x^2 + 4x + 4}{x^2 + x + 1}$.

104. $y = x^2(x - 2)^2$.

109. $y = xe^{3x}$.

105. $y = 1 - \sqrt[3]{x^2 - 2x}$.

110. $y = x - \ln x$.

106. $y = 2x^3 - 3x^2 - 4$.

111. $y = \frac{x^4}{x^3 - 1}$.

107. $y = (x + 1)^2(x - 1)^2$.

Найдите наибольшее и наименьшее значения функций на заданных отрезках.

112. $y = 3 + 2x^2 - 8x^4$, $[-2; 0]$.

118. $y = \frac{x^2}{3x - 6}$, $[3; 5]$.

113. $y = x - 2 \ln x$, $[1; e]$.

119. $y = x - \sin x$, $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

114. $y = x - 2\sqrt{x}$, $[2; 4]$.

115. $y = x + \frac{1}{x}$, $[0,01; 100]$.

120. $y = x^2 e^{-x}$, $[-1; 4]$.

116. $y = 2x^2 - \sqrt{x}$, $[0; 4]$.

117. $y = 2^x$, $[-1; 5]$.

121. Как разбить число 5 на два слагаемых, чтобы сумма их кубов была наименьшей?

122. Из прямоугольного листа картона размером $2,4 \times 1,5$ м² требуется изготовить коробку без крышки. Какова должна быть сторона квадратов, вырезанных из четырёх углов листа, чтобы объём полученной коробки был максимальным? Чему равен объём такой коробки?

123. Если собрать урожай в начале августа, то с каждой сотки можно получить 200 кг раннего картофеля и реализовать его по 12 руб. за килограмм. Отсрочка уборки на каждую неделю ведет к увеличению урожайности на 50 кг с одной сотки, но цена картофеля за килограмм при этом падает на 2 руб. Когда следует собрать картофель, чтобы доход от его продажи был максимальным, если срок уборки составляет 5 недель?

124. Требуется огородить прямоугольную площадь вдоль уже выстроенной стены. Стоимость ограждения стороны, параллельной стене, равна 60 руб. за метр; стоимость ограждения двух других сторон составляет 90 руб. за метр. Какая максимальная площадь может быть огорожена, если имеется всего 10 800 руб.?

125. Прямоугольный участок разделен перегородкой, параллельной меньшей из сторон прямоугольника. Стоимость установки внешнего ограждения составляет 900 руб. за метр, а перегородки – 1600 руб. за метр. Общая площадь участка 153 м^2 . Определите размеры участка, стоимость строительства ограждения которого была бы наименьшей.

126. Каковы должны быть размеры бассейна с квадратным дном объемом 32 м^3 , чтобы на его облицовку пошло как можно меньше материала?

Найдите точки перегиба и промежутки выпуклости графика функции.

127. $y = 6x - x^3$.

131. $y = 2x^2 + \ln x$.

128. $y = x^3 - 6x^2 + 2x + 1$.

132. $y = x + \frac{6}{x}$.

129. $y = x^4 + 2x^3 - 12x^2 - 5x + 2$.

130. $y = x^4 - 8x^3 + 18x^2 - 4x$.

133. При каком значении a кривая $y = x^3 + ax^2 + 1$ имеет точку перегиба при $x = 1$?

134. При каких значениях a кривая $y = x^4 + ax^3 + \frac{3}{2}x^2 + 1$ будет иметь выпуклость вниз на всей числовой прямой?

Вычислите пределы, используя правило Лопиталья.

135. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos x}{x - \pi}$.

139. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi - 2 \operatorname{arctg} x}{e^{3/x} - 1}$.

136. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 3x^2 - 2}{x^3 - 4x^2 + 5}$.

140. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2}$.

137. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\ln(1+x)}$.

141. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^3}$.

138. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} - x - 1}{\cos x + \frac{x^2}{2} - 1}$.

142. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x}$.

143. $\lim_{x \rightarrow 0} (\arcsin x \cdot \operatorname{ctg} x)$.

144. $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$.

$$145. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x \sin x} - \frac{1}{x^2} \right).$$

$$146. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\pi - 2x)^{\cos x}.$$

$$147. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x)^{2x - \pi}.$$

$$148. \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 3^x)^{1/x}.$$

$$149. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\ln(x-5)}{\ln(e^x - e^5)}.$$

$$150. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\ln \sin x}.$$

$$151. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \sin 2x}{\ln \sin x}.$$

$$152. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{ctg}(x-1)}{\ln(1-x)}.$$

$$153. \lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{ctg} \pi x.$$

$$154. \lim_{x \rightarrow +0} x^2 \log_2 x.$$

$$155. \lim_{x \rightarrow \pi/4} (\sin 2x)^{\frac{1}{x - \pi/4}}.$$

$$156. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \right)^{\operatorname{tg} x}.$$

$$157. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_2(3x+1)}{\sqrt[3]{x}}.$$

$$158. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 3^x}{x + \operatorname{arctg} x}.$$

Найдите асимптоты графика функции.

$$159. y = \frac{17 - x^2}{x - 5}.$$

$$160. y = \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x^2 - 4}}.$$

$$161. y = 2x + \operatorname{arctg} x.$$

$$162. y = x^2 e^{2x}.$$

$$163. y = \frac{4x^2 + 9}{4x + 8}.$$

$$164. y = \frac{3}{x^2 - 2x}.$$

Проведите полное исследование функции и постройте график.

$$165. y = 3x - x^3.$$

$$166. y = (x-1)^2 (x-3)^2.$$

$$167. y = 2x^2 - 2 - x^3.$$

$$168. y = (2x+1)^2 (2x-1)^2.$$

$$169. y = \frac{x^3 + 3x^2}{4} - 5.$$

$$170. y = \frac{x^3 + 4}{x^2}.$$

$$171. y = \frac{3 - 2x}{(x-2)^2}.$$

$$172. y = x^2 \ln x.$$

$$173. y = (x-4)e^{x-1}.$$

$$174. y = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2}.$$

$$175. y = \frac{4x^2}{3 + x^2}.$$

$$176. y = x\sqrt{1-x}.$$

$$177. y = \frac{e^x}{x}.$$

$$178. y = \ln \frac{x-1}{x}.$$

Функции нескольких переменных

Найдите область определения функции и изобразите ее на координатной плоскости.

1. $z = \frac{\ln x}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}.$

6. $z = \frac{\sqrt{x - y}}{\sqrt{3 - x^2 - y^2}}.$

2. $z = \ln(-x - y).$

7. $z = \frac{1}{x} \sqrt{x - y^2}.$

3. $z = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{y^2 - 1}.$

8. $z = \sqrt{(y^2 - 1)(x + 1)}.$

4. $z = \ln x + \ln \sin y.$

9. $z = \arcsin \frac{y}{x}.$

5. $z = \sqrt{1 - x^3} + \ln(y^2 - 1).$

Постройте линии уровня следующих функций.

10. $z = x + y.$

12. $z = |x| + y.$

11. $z = \frac{y}{x}.$

Найдите частные производные первого порядка функций.

13. $z = \frac{x + 2y}{3x^2 - 4xy}.$

18. $z = x^y.$

19. $z = \operatorname{arctg} \sqrt{x^y}.$

14. $z = \sqrt{7xy^2 + 4x - 2y}.$

20. $u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$

15. $z = \frac{8x^3 - 3}{9xy^2 + 4x + y}.$

21. $u = \left(\frac{x}{y}\right)^z.$

16. $z = (x \sin y + y \cos x)^2.$

22. $u = x^{\frac{y}{z}}.$

17. $z = \frac{\cos x^2}{x + y}.$

Найдите частные производные второго порядка функций.

23. $z = 7x^4 y - 3xy^3 + 2x - 3y + 7.$

29. $z = \ln(1 + x) \cdot \ln(1 + y^3).$

24. $z = y^5 - 3x^4 + 3xy + 2x - 3.$

30. $z = x^y.$

25. $z = \ln \frac{x}{y}.$

31. $u = \frac{x}{x + y}.$

26. $z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y^2}.$

32. $u = e^{3x^2 + 2y^2 - xy}.$

27. $z = 2^{y \sin x}.$

33. $u = 3x^2 z - 5xyz.$

28. $z = \ln(\sqrt{x} + y^2).$

34. $u = \frac{5x}{yz}.$

35. Проверьте равенство $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ для функции $z = x^{y^2}.$

36. Покажите, что функция $z = \sqrt{x} \cos \frac{x}{y}$ удовлетворяет равенству $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{2}.$

37. Покажите, что функция $z = y \ln(x^2 - y^2)$ удовлетворяет равенству $\frac{1}{x} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}$.

38. Покажите, что функция $z = \ln(e^x + e^y)$ удовлетворяет равенству

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2 = 0.$$

Найдите указанные частные производные.

39. $\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}$, если $u = x \ln(xy)$.

40. $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$, если $u = e^{xyz}$.

Найдите указанные производные.

41. $\frac{du}{dt}$, если $u = e^{x-2y}$, $x = \sin t$, $y = t^3$.

42. $\frac{du}{dt}$, если $u = z^2 + y^2 + zy$, $z = \sin t$, $y = e^t$.

43. $\frac{dz}{dt}$, если $z = \arcsin(x - y)$, $x = 3t$, $y = 4t^3$.

44. $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$, если $z = x^2 y - y^2 x$, $x = u \cos v$, $y = u \sin v$.

45. $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$, если $z = x^2 \ln y$, $x = \frac{u}{v}$, $y = 3u - 2v$.

46. $\frac{du}{dx}$, если $u = \ln(e^x + e^y)$, $y = x^3$.

47. $\frac{dz}{dx}$, если $z = \operatorname{arctg}(xy)$, $y = e^x$.

48. $\frac{du}{dx}$, если $u = \arcsin \frac{x}{z}$, $z = \sqrt{x^2 + 1}$.

49. $\frac{dz}{dt}$, если $z = \operatorname{tg}(3t + 2x^2 - y)$, $x = \frac{1}{t}$, $y = \sqrt{t}$.

Найдите производные от функций, заданных неявно.

50. $x^3 y - y^3 x = a^4$.

52. $\sin(xy) - e^{xy} - x^2 y = 0$.

51. $xe^y + ye^x - e^{xy} = 0$.

53. $xy - \ln y = a$.

Найдите $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ для следующих функций.

54. $x^2 - 2y^2 + z^2 - 4x + 2z - 5 = 0$.

56. $e^z - xyz = 0$.

55. $z^3 + 3xyz = a^3$.

Для данных поверхностей найдите уравнения касательных плоскостей и нормалей в указанных точках.

57. $z = 2x^2 - 4y^2$, $M(2; 1; 4)$.

59. $z = \sqrt{x^2 + y^2} - xy$, $M(3; 4; -7)$.

58. $z = xy$, $M(1; 1; 1)$.

60. $z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, M\left(1; 1; \frac{\pi}{4}\right).$

61. $x^3 + y^3 + z^3 + xyz = 6, M(1; 2; -1).$

62. $3x^4 - 4y^3z + 4xyz^2 - 4xz^3 + 1 = 0,$
 $M(1; 1; 1).$

64. Для поверхности $z = xy$ напишите уравнение касательной плоскости, перпендикулярной к прямой $\frac{x+2}{2} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{-1}.$

65. На поверхности $x^2 + y^2 + z^2 - 6y + 4z = 12$ найдите точки, в которых касательные плоскости параллельны координатным плоскостям.

Найдите градиент функции $z = f(x, y)$ в точке M_0 и производную функции в точке M_0 по направлению вектора $\vec{a}.$

66. $z = x^2 - 2xy - 3y + 5, M_0(1; 2), \vec{a} = \{3; 4\}.$

67. $z = x^2 e^y, M_0(2; 0), \vec{a} = \{-4; 3\}.$

63. $4 + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = x + y + z,$
 $M(2; 3; 6).$

68. $z = x^2 \sin y, M_0\left(\frac{5}{2}; \frac{\pi}{2}\right), \vec{a} = \{-1; 1\}.$

69. $z = e^{xy} + 2\sqrt{x}, M_0(4; 0), \vec{a} = \{1; 2\}.$

70. Найдите производную функции $z = x^2 - y^2$ в точке $M(1; 1)$ в направлении l , составляющим угол $\alpha = 60^\circ$ с положительным направлением оси $Ox.$

71. Определите угол между градиентами функции $u = x^2 + y^2 - z^2$ в точках $A(1; 0; 0)$ и $B(0; 1; 0).$

72. Найдите угол между градиентами функций $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ и $z = x - 3y + \sqrt{3xy}$ в точке $(3; 4).$

73. Найдите точки, в которых модуль градиента функции $z = (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}$ равен 2.

74. Найдите точку, в которой градиент функции $z = \ln\left(x + \frac{1}{y}\right)$ равен $\vec{i} - \frac{16}{9}\vec{j}.$

Найдите экстремумы функции.

75. $z = x^2 + 3y^2 - 9xy + 2x - 5y + 5.$

76. $z = 3 - 2x^2 - xy - 3y^2 + 2y.$

77. $z = 3x^2 - x^3 + 3y^2 + 4y.$

78. $z = x^2 + y^2 - 9xy + 9x - 6y.$

79. $z = 5x^2 + 4xy + 2y^2 + x.$

80. $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2 + 3.$

81. $z = x^3 + y^3 - 15xy.$

82. $z = (x^2 + y^2) \left(e^{-(x^2 + y^2)} - 1 \right).$

83. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$ в прямоугольнике, ограниченном прямыми $x = 0, y = 0, x = 1, y = 2.$

84. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $z = xy + x + y$ в квадрате, ограниченном прямыми $x = 1, y = 2, x = 2, y = 3.$

85. Найдите наибольшее значение функции $z = x^2y(4 - x - y)$ в треугольнике, ограниченном прямыми $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 6$.

86. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + y^2 - 12x$ в круге $x^2 + y^2 \leq 25$.

87. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $z = \sin x + \sin y + \sin(x + y)$ в области $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$.

ОТВЕТЫ

Введение в анализ

- 1.** $[-2; 2]$. **2.** \emptyset . **3.** $(-\infty; -8] \cup [-2; +\infty)$. **4.** $[-1; 0]$. **5.** $(-\infty; 2)$. **6.** $(0; 1) \cup (1; 3)$. **7.** $(0; 3)$.
8. Чётная. **9.** Чётная. **10.** Общего вида. **11.** Чётная. **12.** Нечётная. **13.** Чётная. **29.** 0. **30.** 0.
31. $\frac{3}{2}$. **32.** 3. **33.** ∞ . **34.** ∞ . **35.** $\frac{2}{3}$. **36.** $\frac{1}{2}$. **37.** 0. **38.** $\frac{5}{7}$. **39.** 0. **40.** ∞ . **41.** $-\frac{1}{6}$. **42.** $-\frac{5}{2}$.
43. ∞ . **44.** $-\frac{1}{12}$. **45.** 0. **46.** 2. **47.** $\frac{5}{4}$. **48.** 2. **49.** $-\frac{3}{2}$. **50.** -8. **51.** -18. **52.** $-\frac{3}{20}$. **53.** $\frac{4\sqrt{3}}{3}$.
54. $\frac{1}{6}$. **55.** $-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}$. **56.** 0. **57.** 0. **58.** $\frac{3}{2}$. **59.** e^{15} . **60.** e^2 . **61.** $e^{1/4}$. **62.** $e^{-28/3}$. **63.** 1. **64.** e^{16} .
65. $+\infty (x \rightarrow +\infty)$, $0 (x \rightarrow -\infty)$. **66.** $0 (x \rightarrow +\infty)$, $+\infty (x \rightarrow -\infty)$. **67.** $0 (x \rightarrow +\infty)$,
 $+\infty (x \rightarrow -\infty)$. **68.** $+\infty (x \rightarrow +\infty)$, $0 (x \rightarrow -\infty)$. **69.** e^{-2} . **70.** 1. **71.** 2. **72.** 8. **73.** $\frac{2}{7}$. **74.** $\frac{25}{3}$.
75. $\frac{8}{3}$. **76.** 64. **77.** $\frac{1}{2}\ln 2$. **78.** $\frac{32}{625}$. **79.** $\frac{3}{\pi}$. **80.** 2π . **81.** $\frac{2}{9}$. **82.** $\frac{9}{\pi}$. **83.** 2. **84.** $-\frac{3}{2}$. **85.** $\frac{7}{8}$. **86.** $\frac{8}{3}$.
87. $\frac{1}{4}$. **88.** $x=2$ – точка устранимого разрыва. **89.** $x=4$ – точка неустраняемого разрыва.
90. $x=-1$ – точка неустраняемого разрыва. **91.** $x=-3$ – точка разрыва 2 рода. **92.** $x=4$ –
точка разрыва 2 рода. **93.** $x=2$ – точка неустраняемого разрыва. **94.** $x=0$ и $x=2$ – точки
разрыва 2 рода. **95.** $x=0$ – точка устранимого разрыва, $x=2$ – точка разрыва 2 рода
96. $x=0$ – точка неустраняемого разрыва. **97.** $x=-1$ – точка разрыва 2 рода. **98.** Функция
непрерывна. **99.** $x=0$ – точка разрыва 2 рода.

Производная и ее применение

- 1.** $\frac{x^2 - 3x + 3\sqrt{(1-x^2)^3} \arcsin x}{(x^3 - 3x)^2 \sqrt{1-x^2}}$. **2.** $\frac{8^x(3x \ln 2 - 2)}{\sqrt[3]{x^5}}$. **3.** $\ln x + 1 + \frac{1}{2\sqrt{x(1-x)}}$.
4. $\frac{x(14x-3)\ln x - 7x^2 + 3x}{x \cdot \ln 2 \cdot \log_2^2 x}$. **5.** $\frac{1}{2(1+x^2)\sqrt{\operatorname{arctg} x}}$. **6.** $\frac{1}{\sin \frac{2x+1}{2}}$. **7.** $\frac{15x^2 \cos^2 x + 9}{2 \cos^2 x \sqrt{5x^3 + 9 \operatorname{tg} x}}$.
8. $\frac{1}{2\sqrt{x(1-2x)}}$. **9.** $(3x^2 + \cos x) \log_3^2 x + 2(x^3 + \sin x) \frac{\log_3 x}{x \ln 3}$.
10. $\frac{-3 \sin 2x(x^2 - 7x + 2) - 3(2x - 7) \cos^2 x}{(x^2 - 7x + 2)^2}$. **11.** $\frac{e^{8x^2+3}}{\sin^2 x} (8x \sin 2x - 1)$. **12.** $\frac{2x}{x^4 - 1}$.
13. $2 \cos 2x + \sin 2x$. **14.** $\frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{1}{\cos^2 2x}$. **15.** $\frac{3(1 - \sin 3x)}{2\sqrt{3x + \cos 3x}}$. **16.** $\operatorname{tg}^7 \frac{x}{8} / \cos^2 \frac{x}{8}$. **17.** $\frac{1}{\sqrt{x^2 - 3}}$.
18. $\frac{4}{4-x^2}$. **19.** $-\ln 3 \cdot \sin 2x \cdot 3^{\cos^2 x}$. **20.** $\sin 2x \cdot \ln 2$. **21.** $\frac{1}{2+x^2}$. **22.** $\frac{x^2}{2\sqrt{16-2x^6}}$. **23.** $\frac{1}{x \ln x}$.

24. $\frac{2}{x(1-x^2)}$. **25.** $\frac{6x}{\sqrt{9x^4+1}}$. **26.** $\sqrt{1-x^2}$. **27.** $e^{x^2}(x \sin 2x + x \cos 2x + \cos 2x - \sin 2x)$.

28. $\frac{2^x}{x^2 \ln 2}(x^2 \ln 2 \cdot \ln x - x \ln 2 + x + 1)$. **29.** $x \sin^2 x^2 \cos x^2$. **30.** $\operatorname{tg}^2 \frac{x}{3} / \cos^2 \frac{x}{3}$.

31. $\frac{2 \sin \frac{x}{3}}{\left(1 + \cos \frac{x}{3}\right)^3}$. **32.** $6x \cdot 2^{3x^2} \ln 2 + \operatorname{ctg} x$. **33.** $\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}(\sqrt{x} + 1)$. **34.** $3 \operatorname{ctg}(3x + 2)$.

35. $-\frac{e^{-x^2}(2x^2 - 6x + 1)}{(x-3)^2}$. **36.** $\frac{x}{(2+x^2)\sqrt{1+x^2} \operatorname{arctg} \sqrt{1+x^2}}$. **37.** $\frac{\arcsin x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$.

38. $6(2x + \sin 2x)^2(1 + \cos 2x)$. **39.** $\frac{10x^4}{3 \cdot \sqrt[3]{1+x^5}}$. **40.** $-\frac{1}{15\sqrt{(1+x)^3}}$. **41.** $\frac{2}{2+e^x}$. **42.** $\frac{5\sqrt{\operatorname{arctg}^3 3x}}{1+9x^2}$.

43. $\frac{e^x}{\left(4 + (e^x - 3)^2\right)}$. **44.** $\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$. **45.** $\frac{e^x(1+e^x)}{\sqrt{1-e^{2x}}}$. **46.** $\frac{2}{\ln \operatorname{tg} x \sin 2x}$.

47. $2x \cos 12x(\cos 12x + 12x \sin 12x)$. **48.** $\frac{3 \cos 3x \sin 3x \sin 4x - 2 \cos^2 3x \cos 4x}{2 \sin^2 4x}$.

49. $\frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x^2 \sqrt{1+x^2}}$. **50.** $\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{6\sqrt{x(1-x)}} + \frac{4}{3\sqrt{x(1+x)}}$. **51.** $e^{(x^2+1)\cos x}(2x \cos x - (x^2+1)\sin x)$.

52. $3x^2 \cdot 2^{\sin x^3} \cos x^3$. **53.** $5x^4 + e^{-x} \arcsin x + \frac{e^{-x}}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}(1+\sqrt{1+x^2})}$.

54. $(\sin x)^{\cos x - 1}(\cos^2 x - \sin^2 x \ln \sin x)$. **55.** $\frac{2(x+1)^{\frac{2}{x}-1}(x - (x+1)\ln(x+1))}{x^2}$.

56. $(x^2+1)^{\sin x - 1}\left((x^2+1)\cos x \ln(x^2+1) + 2x \sin x\right)$. **57.** $-\frac{2(x-2)(x^2+11x+1)}{3\sqrt[3]{(x+1)^2(x-5)^4}}$.

58. $-\frac{2(x^4+6x^2+1)}{3\sqrt[3]{x^2(x^2+1)^2(x^2-1)^5}}$. **59.** $\frac{1}{2}\sqrt{x \sin x \sqrt{1-e^x}}\left(\frac{1}{x} + \operatorname{ctg} x + \frac{e^x}{2(e^x-1)}\right)$. **60.** $y'' = 2 \cos 2x$.

61. $y'' = -\frac{18(9x^2+5)}{(3x^2-5)^3}$. **62.** $y'' = \frac{2 \sin x}{\cos^3 x}$. **63.** $y''' = -\frac{1}{x^2}$. **64.** $y''' = (3-x)e^{-x}$.

65. $y^{IV} = \frac{6x^3 + 9x}{\sqrt{(1-x^2)^7}}$. 66. $y^{(2n)} = (-1)^n \sin x$, $y^{(2n+1)} = (-1)^n \cos x$, $n = 0, 1, 2, \dots$
67. $y^{(n)} = \frac{(-1)^{n+1} (n-1)!}{x^n}$, $n = 1, 2, \dots$ 68. $y^{(n)} = \ln^n 2 (2^x + (-1)^n 2^{-x})$, $n = 0, 1, 2, \dots$
70. $y = 4x$, $y = -\frac{1}{4}x + \frac{17}{2}$. 71. $y = 5x - 17$, $y = -\frac{1}{5}x - \frac{7}{5}$. 72. $y = -\frac{1}{2}x + 2$, $y = 2x - 3$.
73. $y = 4x$, $y = -4x + 16$. 74. $y = 2x - 1$. 75. $y'(0) = y'(4) = \frac{1}{2}$. 76. $y = x$, $y = -x$.
77. $\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}t$. 78. $\frac{dy}{dx} = -1$. 79. $\frac{dy}{dx} = \frac{t}{2}$. 80. $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos t - \sin t}{\cos t + \sin t}$. 81. $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3b}{4a^2t}$.
82. $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{a \sin^3 t}$. 83. $\frac{d^2y}{dx^2} = 4t^2$. 84. $\frac{d^3y}{dx^3} = -\frac{3b \cos t}{a^3 \sin^5 t}$. 85. $\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{b(\cos^2 t - 4 \sin^2 t)}{9a^3 \sin^3 t \cos^7 t}$.
86. $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos t - \sin t}{\cos t + \sin t}$, $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2}{e^t (\cos t + \sin t)^3}$. 87. $x + 2y - 4 = 0$, $2x - y - 3 = 0$.
88. $4x + 2y - 3 = 0$, $2x - 4y + 1 = 0$. 89. $y = 2$, $x = 1$. 90. $\frac{x^4}{y} \cdot \frac{y^2 - 2x^2}{2y^2 - x^2}$.
91. $-\frac{y \cos^2(x+y)(\cos(xy) - \sin(xy)) - 1}{x \cos^2(x+y)(\cos(xy) - \sin(xy)) - 1}$. 92. $\frac{1}{2(1 + \ln y)}$. 93. $2^{x-y} \cdot \frac{2^y - 1}{1 - 2^x}$.
94. $\frac{\sqrt{1-y^2}(1-\sqrt{1-x^2})}{\sqrt{1-x^2}(1-\sqrt{1-y^2})}$. 95. 1) $-\frac{b^4}{a^2 y^3}$; 2) $-\frac{y((x-1)^2 + (y-1)^2)}{x^2(y-1)^2}$; 3) $-\frac{2a^3 xy}{(y^2 - ax)^3}$.
- 96.1) $\frac{54x}{(x-2y)^5}$; 2) $-\frac{2(3y^4 + 8y^2 + 5)}{y^8}$. 97. $-\frac{3}{4}$, $-\frac{25}{64}$, $-\frac{225}{1024}$. 98. $\frac{1}{e^2}$. 99. $y = x$.
100. $x + 2y - 3 = 0$, $2x - y - 1 = 0$. 101. $\frac{2 \operatorname{tg} x}{\cos^2 x} dx$. 102. $\left(\frac{1}{2\sqrt{1-x^2} \sqrt{\arcsin x}} + \frac{2 \operatorname{arctg} x}{1+x^2} \right) dx$.
103. $y_{\max} = y(1) = -4$, $y_{\min} = y(2) = -5$. 104. $y_{\max} = y(1) = 1$, $y_{\min} = y(0) = 0$,
 $y_{\min} = y(2) = 0$. 105. $y_{\max} = y(1) = 2$. 106. $y_{\max} = y(0) = -4$, $y_{\min} = y(1) = -5$.
107. $y_{\max} = y(0) = 1$, $y_{\min} = y(-1) = 0$, $y_{\min} = y(1) = 0$. 108. $y_{\max} = y(0) = 4$,
 $y_{\min} = y(-2) = \frac{8}{3}$. 109. $y_{\min} = y\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3e}$. 110. $y_{\min} = y(1) = 1$. 111. $y_{\max} = y(0) = 0$,
- $y_{\min} = y(\sqrt[3]{4}) = \frac{4\sqrt[3]{4}}{3}$. 112. $y_{\text{наим}} = -117$, $y_{\text{наиб}} = \frac{25}{8}$. 113. $y_{\text{наим}} = 2(1 - \ln 2)$, $y_{\text{наиб}} = 1$.
114. $y_{\text{наим}} = 2 - 2\sqrt{2}$, $y_{\text{наиб}} = 0$. 115. $y_{\text{наим}} = 2$, $y_{\text{наиб}} = 100,01$. 116. $y_{\text{наим}} = -\frac{3}{8}$, $y_{\text{наиб}} = 30$.

117. $y_{\text{наим}} = \frac{1}{2}$, $y_{\text{наиб}} = 32$. 118. $y_{\text{наим}} = \frac{24}{9}$, $y_{\text{наиб}} = 3$. 119. $y_{\text{наим}} = 1 - \frac{\pi}{2}$, $y_{\text{наиб}} = \pi$.
120. $y_{\text{наим}} = 0$, $y_{\text{наиб}} = e$. 121. 2,5 и 2,5. 122. 0,3 м, $V = 0,486 \text{ м}^3$. 123. Через одну неделю.
124. $2700 \text{ м}^2 = 30 \times 90$. 125. 17×9 . 126. Высота 2 м, сторона дна 4 м. 127. Выпуклая вниз на $(-\infty; 0)$, выпуклая вверх на $(0; +\infty)$. 128. Выпуклая вниз на $(2; +\infty)$, выпуклая вверх на $(-\infty; 2)$. 129. Выпуклая вниз на $(-\infty; -2)$ и $(1; +\infty)$, выпуклая вверх на $(-2; 1)$.
130. Выпуклая вниз на $(-\infty; 1)$ и $(3; +\infty)$, выпуклая вверх на $(1; 3)$. 131. Выпуклая вниз на $(\frac{1}{2}; +\infty)$, выпуклая вверх на $(0; \frac{1}{2})$. 132. Выпуклая вниз на $(0; +\infty)$, выпуклая вверх на $(-\infty; 0)$. 133. $a = -3$. 134. $|a| \leq 2$. 135. 0. 136. $-\frac{3}{11}$. 137. 2. 138. 1. 139. $\frac{2}{3}$. 140. $+\infty$.
141. 0. 142. 0. 143. 1. 144. $\frac{2}{\pi}$. 145. $\frac{1}{6}$. 146. 1. 147. 1. 148. 3. 149. 1. 150. 1. 151. 1. 152. ∞ .
153. $\frac{1}{\pi}$. 154. 0. 155. 1. 156. 1. 157. 0. 158. $\frac{\ln 2 - \ln 3}{2}$. 159. $x = 5$, $y = -x - 5$. 160. $x = \pm 2$,
 $y = x$ ($x \rightarrow +\infty$), $y = -x$ ($x \rightarrow -\infty$). 161. $y = 2x \pm \frac{\pi}{2}$ ($x \rightarrow \pm\infty$). 162. $y = 0$ ($x \rightarrow -\infty$).
163. $x = -2$, $y = x - 2$. 164. $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$.

Функции нескольких переменных

13. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{8y^2 - 12xy - 3x^2}{(3x^2 - 4xy)^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{10}{(3x - 4y)^2}$. 14. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{7y^2 + 4}{2\sqrt{7xy^2 + 4x - 2y}}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{7xy - 1}{\sqrt{7xy^2 + 4x - 2y}}$.
15. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{144x^3y^2 + 64x^3 + 24x^2y + 27y^2 + 12}{(9xy^2 + 4x + y)^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{(8x^3 - 3)(18xy + 1)}{(9xy^2 + 4x + y)^2}$.
16. $\frac{\partial z}{\partial x} = 2(x \sin y + y \cos x) \times (\sin y - y \sin x)$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 2(x \sin y + y \cos x)(x \cos y + \cos x)$.
17. $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2x(x+y)\sin x^2 + \cos x^2}{(x+y)^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\cos x^2}{(x+y)^2}$. 18. $\frac{\partial z}{\partial x} = y \cdot x^{y-1}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x$.
19. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y \cdot x^{y-1}}{2\sqrt{x^y(1+x^y)}}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\sqrt{x^y \ln x}}{2(1+x^y)}$. 20. $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}$,
 $\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{z}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}$. 21. $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{z}{y} \cdot \left(\frac{x}{y}\right)^{z-1}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{xz}{y^2} \cdot \left(\frac{x}{y}\right)^{z-1}$, $\frac{\partial u}{\partial z} = \left(\frac{x}{y}\right)^z \ln\left(\frac{x}{y}\right)$. 22. $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y}{z} x^{\frac{y}{z}-1}$,
 $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{z} \cdot x^{\frac{y}{z}} \ln x$, $\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{y}{z^2} \cdot x^{\frac{y}{z}} \ln x$. 23. $\frac{\partial z}{\partial x} = 28x^3y - 3y^3 + 2$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 7x^4 - 9xy^2 - 3$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 84x^2y$,
 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 28x^3 - 9y^2$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -18xy$. 24. $\frac{\partial z}{\partial x} = -12x^3 + 3y + 2$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 5y^4 + 3x$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -36x^2$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 3$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 20y^3. \quad \mathbf{25.} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{1}{x^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{y^2}. \quad \mathbf{26.} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y^2}{y^4 + x^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-2xy}{y^4 + x^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{-2xy^2}{(y^4 + x^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{2x^2 y - 2y^5}{(y^4 + x^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{6xy^4 - 2x^3}{(y^4 + x^2)^2}. \quad \mathbf{27.} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = y \cos x \cdot 2^{y \sin x} \ln 2,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \sin x \cdot 2^{y \sin x} \ln 2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y \cdot 2^{y \sin x} \ln 2 (y \ln 2 \cos^2 x - \sin x),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \cos x \cdot 2^{y \sin x} \ln 2 (y \sin x \ln 2 + 1), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \sin^2 x \cdot 2^{y \sin x} \ln^2 2. \quad \mathbf{28.} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x} + y^2)},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{\sqrt{x} + y^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{2\sqrt{x} + y^2}{4x\sqrt{x}(\sqrt{x} + y^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{y}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + y^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2(\sqrt{x} - y^2)}{(\sqrt{x} + y^2)^2}.$$

$$\mathbf{29.} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\ln(1 + y^3)}{1 + x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{3y^2 \ln(1 + x)}{1 + y^3}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{\ln(1 + y^3)}{(1 + x)^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{3y^2}{(1 + x)(1 + y^3)},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{(6y - 3y^4) \ln(1 + x)}{(1 + y^3)^2}. \quad \mathbf{30.} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = y \cdot x^{y-1}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y(y-1) \cdot x^{y-2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = x^{y-1} (1 + y \ln x), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^y \ln^2 x. \quad \mathbf{31.} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y}{(x+y)^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x}{(x+y)^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{2y}{(x+y)^3},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{x-y}{(x+y)^3}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{2x}{(x+y)^3}. \quad \mathbf{32.} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = e^{3x^2+2y^2-xy} (6x-y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = e^{3x^2+2y^2-xy} (4y-x),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = e^{3x^2+2y^2-xy} ((6x-y)^2 + 6), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = e^{3x^2+2y^2-xy} ((4y-x)(6y-x) - 1),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^{3x^2+2y^2-xy} ((4y-x)^2 + 4). \quad \mathbf{33.} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 6xz - 5yz, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -5xz + 4z^3, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 3x^2 - 5xy + 12yz^2,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6z, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 24yz, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -5z, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = 6x - 5y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = -5x + 12z^2. \quad \mathbf{34.} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{5}{yz},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{5x}{y^2 z}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{5x}{yz^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{10x}{y^3 z}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{10x}{yz^3}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{5}{y^2 z}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = -\frac{5}{yz^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = \frac{5x}{y^2 z^2}.$$

$$\mathbf{39.} \quad 0. \quad \mathbf{40.} \quad e^{xyz} (3xyz + x^2 y^2 z^2 + 1). \quad \mathbf{41.} \quad e^{\sin t - 2t^3} (\cos t - 6t^2). \quad \mathbf{42.} \quad \sin 2t + 2e^{2t} + e^t (\sin t + \cos t).$$

$$\mathbf{43.} \quad \frac{3 - 12t^2}{\sqrt{1 - (3t - 4t^3)^2}}. \quad \mathbf{44.} \quad 3u^3 \sin v \cos v (\cos v - \sin v), \quad u^3 (\sin v + \cos v) (1 - 3 \sin v \cos v).$$

$$\mathbf{45.} \quad 2 \frac{u}{v^2} \ln(3u - 2v) + \frac{3u^2}{v^2(3u - 2v)}, \quad -\frac{2u^2}{v^2} \ln(3u - 2v) - \frac{2u^2}{v^2(3u - 2v)}. \quad \mathbf{46.} \quad \frac{e^x + 3e^{x^3} x^2}{e^x + e^{x^3}}. \quad \mathbf{47.} \quad \frac{e^x (x+1)}{1 + x^2 e^{2x}}.$$

$$\mathbf{48.} \quad \frac{1}{1 + x^2}. \quad \mathbf{49.} \quad \left(3 - \frac{4}{t^2} - \frac{1}{2\sqrt{t}}\right) \left(\cos\left(3t + \frac{2}{t^2} - \sqrt{t}\right)\right)^{-2}. \quad \mathbf{50.} \quad \frac{3x^2 y - y^3}{3xy^2 - x^3}. \quad \mathbf{51.} \quad \frac{ye^{xy} - ye^x - e^y}{xe^y + e^x - xe^{xy}}.$$

- 52.** $\frac{y}{x} \cdot \frac{2x + e^{xy} - \cos(xy)}{\cos(xy) - e^{xy} - x}$. **53.** $\frac{y^2}{1-xy}$. **54.** $\frac{2-x}{z+1}, \frac{2y}{z+1}$. **55.** $\frac{-yz}{xy+z^2}, \frac{-xz}{xy+z^2}$. **56.** $\frac{z}{x(z-1)}, \frac{z}{y(z-1)}$.
- 57.** $8x - 8y - z = 4, \quad \frac{x-2}{8} = \frac{y-1}{-8} = \frac{z-4}{-1}$. **58.** $x + y - z - 1 = 0, \quad \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-1}$.
- 59.** $17x + 11y + 5z = 60, \quad \frac{x-3}{17} = \frac{y-4}{11} = \frac{z+7}{5}$. **60.** $x - y + 2z - \frac{\pi}{2} = 0, \quad \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-\pi/2}{2}$.
- 61.** $x + 11y + 5z - 18 = 0, \quad \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{11} = \frac{z+1}{5}$. **62.** $3x - 2y - 2z + 1 = 0, \quad \frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{-2}$.
- 63.** $5x + 4y + z - 28 = 0, \quad \frac{x-2}{5} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-6}{1}$. **64.** $2x + y - z = 2$. **65.** $Oxy: (0; 3; 3), (0; 3; -7);$
 $Oyz: (5; 3; -2), (-5; 3; -2); \quad Oxz: (0; -2; -2), (0; 8; -2)$. **66.** $\{-2; -5\}, -\frac{26}{5}$. **67.** $\{4; 4\}, \frac{4}{5}$.
- 68.** $\{5; 0\}, -\frac{5}{\sqrt{2}}$. **69.** $\left\{\frac{1}{2}; 4\right\}, \frac{17}{2\sqrt{5}}$. **70.** $1 - \sqrt{3}$. **71.** $\frac{\pi}{2}$. **72.** $\arccos\left(-\frac{12}{5\sqrt{145}}\right)$. **73.** Точки на окружности $x^2 + y^2 = \frac{3}{2}$. **74.** $\left(-\frac{1}{3}; \frac{3}{4}\right), \left(\frac{7}{3}; -\frac{3}{4}\right)$. **75.** Экстремумов нет. Стац. точка $\left(-\frac{11}{23}; \frac{8}{69}\right)$.
- 76.** $z_{\max} = z\left(-\frac{2}{23}; \frac{8}{23}\right) = \frac{1771}{529}$. **77.** $z_{\min} = z\left(0; -\frac{2}{3}\right) = -\frac{4}{3}$. Стац. точка $\left(2; -\frac{2}{3}\right)$.
- 78.** Экстремумов нет. Стац. точка $\left(-\frac{36}{77}; \frac{69}{77}\right)$. **79.** $z_{\min} = z\left(-\frac{1}{6}; \frac{1}{6}\right) = -\frac{1}{9}$.
- 80.** $z_{\min} = z(\sqrt{2}; -\sqrt{2}) = -5, \quad z_{\min} = z(-\sqrt{2}; \sqrt{2}) = -5$. В точке $(0; 0)$ требуется дополнительное исследование. **81.** $z_{\min} = -125$. **82.** $z_{\min} = 0$. **83.** $z_{\text{наиб}} = z(1; 2) = 17, \quad z_{\text{наим}} = z(1; 0) = -3$.
- 84.** $z_{\text{наиб}} = 11, \quad z_{\text{наим}} = 5$. **85.** $z_{\text{наиб}} = z(2; 1) = 4$. **86.** $z_{\text{наиб}} = 85, \quad z_{\text{наим}} = -35, \quad z_{\text{наиб}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.
- 87.** $z_{\text{наиб}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}, \quad z_{\text{наим}} = 0$.