1.2.1. Функции спроса

При изучении экономических процессов постоянно используются функции спроса, предложения, издержек, полезности; функции, связанные с банковскими операциями; производственные функции и др.

Рассмотрим некоторые из них.

О Если каждому значению цены p за единицу товара поставлено в соответствие число q — количество товара, которое потребители готовы купить по данной цене за определенный промежуток времени, то говорят, что задана ***функция спроса***, и пишут $q = f(p)$.

Эта функция определена для тех значений $p \geq 0$, для которых $f(p) \geq 0$ и множество ее значений $q \geq 0$.

График функции спроса называют *кривой спроса* (рис. 1.10).

В экономике сформулирован *закон спроса*, который гласит: чем выше цена единицы товара, тем меньше величина спроса,

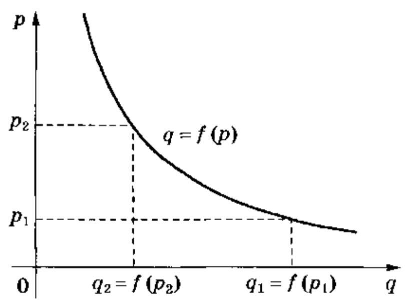


Рис. 1.10

и наоборот, чем ниже цена единицы товара, тем больше величина спроса.

Таким образом, для двух произвольных значений p_1 и p_2, принадлежащих области определения функции спроса $q = f(p)$, и таких, что $p_1 < p_2$, следует, что $q_1 > q_2$, т. е. функция спроса является убывающей функцией цены p.

Обратим внимание на необычное расположение осей координат: аргумент p расположен на вертикальной оси — оси ординат, а значение функции $q = f(p)$ — на горизонтальной — оси абсцисс. Это принятая в экономике система обозначений.

Примеры. **1.** Функция спроса на некоторый товар имеет вид:

$$q = 60 - \sqrt{400 + p},$$

где q — количество товара (тыс. шт.); p — цена единицы товара (руб.). Требуется найти:

1) область определения и множество значений этой функции;

2) функцию цены в виде $p = f^{-1}(q)$;

3) объем спроса при ценах на товар: $p_1 = 500$; $p_2 = 1\,200$;

4) цену за единицу товара, если $q_1 = 20$; $q_2 = 30$, и выручку продавцов в каждом из этих случаев, а также построить график функции спроса $q = 60 - \sqrt{400 + p}$.

Решение. 1) Имеем систему неравенств:

$$\begin{cases} p \geq 0 \\ 400 + p \geq 0 \\ 60 - \sqrt{400 + p} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p \geq 0 \\ p \geq -400 \\ \sqrt{400 + p} \leq 60 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p \geq 0 \\ p \geq -400 \\ 400 + p \leq 3600 \end{cases} \Rightarrow 0 \leq p \leq 3\,200.$$

Итак, $D(f) = [0;\ 3\,200]$.

Выразим значение p через q:

$$\sqrt{400 + p} = 60 - q \Rightarrow 400 + p = (60 - q)^2 \Rightarrow 400 + p = 3\,600 - 120q + q^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow p = q^2 - 120q + 3\,200.$$

Рис. 1.11

Так как $p \geq 0$, то $q^2 - 120q + 3\,200 \geq 0$.

$$\left(\frac{D}{4} = 3\,600 - 3\,200 = 400;\ \sqrt{\frac{D}{4}} = 20;\ q_1 = 60 - 20 = 40;\ q_2 = 60 + 20 = 80\right)$$

$$q \in (-\infty;\ 40] \cup [80;\ +\infty), \text{ рис. } 1.11.$$

С учетом того, что $q \geq 0$, получим: $q \in [0;\ 40] \cup [80;\ +\infty)$.

Из закона спроса следует, что с увеличением цены p от нуля до 3 200 руб. спрос должен падать.

В нашем случае функция q убывает в промежутке $q \in [0;\ 40]$, следовательно, множество значений функции $E(f) = [0;\ 40]$.

2) Функция цены имеет вид: $p = q^2 - 120q + 3\,200$.

3) $p_1 = 500 \Rightarrow q_1 = 60 - \sqrt{400 + 500} = 60 - 30 = 30$ (тыс. шт.);

$p_2 = 1200 \Rightarrow q_2 = 60 - \sqrt{400 + 1200} = 60 - 40 = 20$ (тыс. шт.).

4) $q_1 = 20 \Rightarrow p_1 = 400 - 120 \cdot 20 + 3\,200 = 1\,200$ (руб.);

$q_2 = 30 \Rightarrow p_1 = 900 - 120 \cdot 30 + 3\,200 = 500$ (руб.).

Выручка от продажи составляет $u = pq$, следовательно,

$u_1 = p_1 q_1 = 1\,200 \cdot 20 = 24\,000$ (руб.);

$u_2 = p_2 q_2 = 500 \cdot 30 = 15\,000$ (руб.).

График функции $q = 60 - \sqrt{400 + p}$ имеет вид, представленный на рис. 1.12.

Дополнительная точка: $q = 40 \Rightarrow p = 1\,600 - 120 \cdot 40 + 3\,200 = 0$.

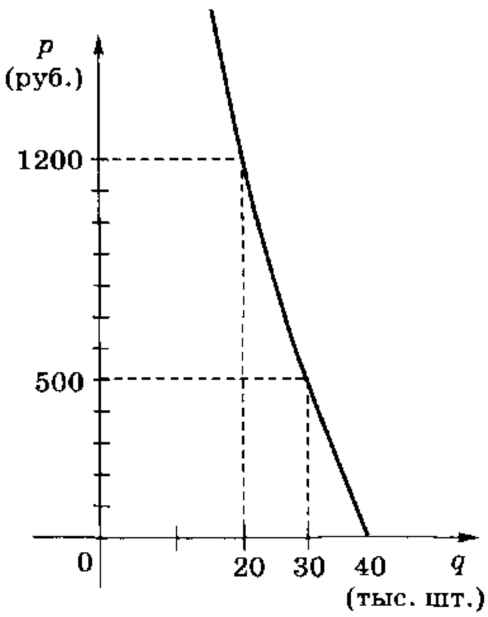


Рис. 1.12

2. В качестве ***теоретического примера*** рассмотрим функции Торнквиста (названные по имени шведского экономиста Л. Торнквиста), моделирующие связь между величиной денежного дохода x (условных единиц) и величиной спроса потребителей y (условных единиц) на различные товары:

1) $y = a\dfrac{x}{x+b}$ — для товаров первой необходимости;

2) $y = a\dfrac{x-c}{x+b}$ — для товаров второй необходимости (относительной роскоши), $(x > c)$;

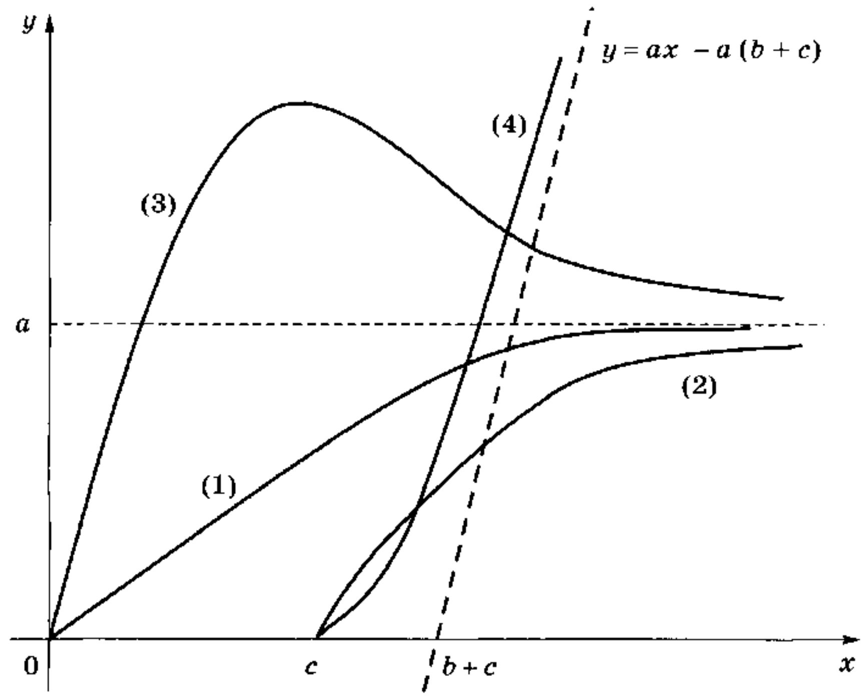


Рис. 1.13

3) $y = a\dfrac{x(x+b)}{x^2+c}$ — для малоценных товаров;

4) $y = a\dfrac{x(x-c)}{x+b}$ — для предметов роскоши ($x > c$)

[a — уровень (точка насыщения) первой, второй и третьей групп товаров; c — уровень дохода, при котором начинается потребление товаров второй необходимости и предметов роскоши; b — постоянная экономическая величина, значение которой определяется по ходу решения конкретной задачи].

Графики данных функций представим пока без подробных объяснений, которые можно давать позднее, после изучения темы «Полное исследование и построение графиков функций» (рис. 1.13).

1.2.2. Функция предложения

О Если каждому значению цены p за единицу товара поставлено в соответствие число q, выражающее количество товара, которое производители готовы продать за определенный промежуток времени по цене p, то говорят, что задана ***функция предложения***, и пишут $q = \varphi(p)$. Эта функция определена для тех значений $p \geq 0$, для которых $\varphi(p) \geq 0$. Множеством ее значений является $q \geq 0$ (рис. 1.14).

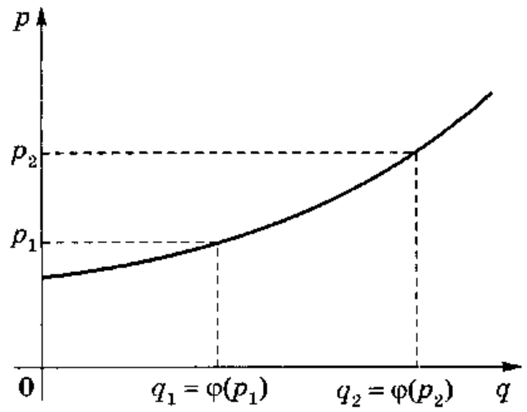


Рис. 1.14

В экономике действует *закон предложения*, который гласит: повышение цены за единицу товара в течение определенного промежутка времени влечет за собой рост объема предложения этого товара и, наоборот, понижение цены за единицу товара в течение определенного промежутка времени приводит к сокращению объема предложения товара.

Из этого закона вытекает, что для любых двух значений p_1 и p_2, принадлежащих области определения функции $\varphi(p)$, и таких, что $p_2 > p_1$, следует, что $(q_2 = \varphi(p_2)) > (q_1 = \varphi(p_1))$, т. е. функция предложения является возрастающей функцией цены p.

Рассматривают также функцию $p = \varphi^{-1}(q)$, которая является обратной к функции $q = \varphi(p)$ и описывает зависимость цены единицы товара от его объема, предложенного к продаже.

Пример. Функция предложения некоторого товара на рынке имеет вид: $q = \frac{1}{4}(p-2)^2 - 1$, где q — количество предлагаемого товара (тыс. шт.); p — цена за единицу товара (руб.). Требуется найти:

1) область определения и множество значений функции q;

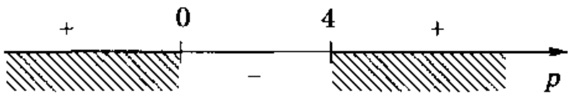
2) объем предложения при цене за единицу товара $p_1 = 12$ руб.; $p_2 = 18$ руб.;

3) зависимость цены за единицу товара от объема спроса, т. е. функцию $p = \varphi^{-1}(q)$, а также построить график функции $q = \frac{1}{4}(p-2)^2 - 1$.

Решение. 1) Областью определения функции q является множество таких действительных значений p, при которых $q \geq 0$, т. е. $\frac{1}{4}(p-2)^2 - 1 \geq 0$, или $(p-2)^2 - 4 \geq 0$, или $(p-2-2)(p-2+2) \geq 0$, или $p(p-4) \geq 0$. Решая данное неравенство методом интервалов, получим (рис. 1.15): $p \in (-\infty; 0] \cup [4; +\infty)$.

Поскольку значения p не могут быть отрицательными, окончательно принимаем $p \in [4; +\infty)$.

Рис. 1.15



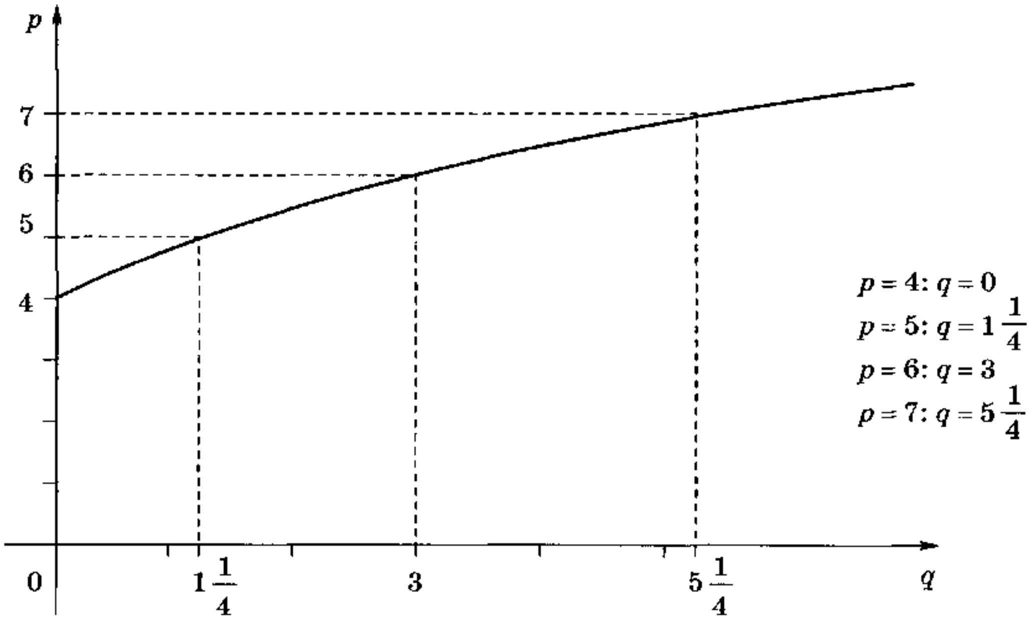


Рис. 1.16

Множество значений функции q при $p \geq 4$ будет $q \in [0; +\infty)$.

2) При $p_1 = 12$: $q_1 = \frac{1}{4}(12 - 2)^2 - 1 = 25 - 1 = 24$ (тыс. шт.);

$p_2 = 18$: $q_2 = \frac{1}{4}(18 - 2)^2 - 1 = 64 - 1 = 63$ (тыс. шт.).

3) Найдем функцию $p = \varphi^{-1}(q)$.

Будем иметь: $\frac{1}{4}(p-2)^2 = q + 1 \Rightarrow (p-2)^2 = 4(q+1) \Rightarrow p - 2 = \pm 2\sqrt{q+1} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ $p = 2 - 2\sqrt{q+1}$ или $p = 2 + 2\sqrt{q+1}$.

Так как $p \geq 4$, берем $p = 2 + 2\sqrt{q+1}$.

График функции $q = \frac{1}{4}(p - 2)^2 - 1$ имеет вид, представленный на рис. 1.16.

1.2.3. Рыночное равновесие

На рынке происходит встреча продавцов и производителей товара с его покупателями и потребителями. При этом продавцы желают продать больше товара по более высокой цене и тем самым максимизировать свою прибыль, а покупатели хотят приобрести нужное им количество товара по возможно более низкой цене и тем самым минимизировать свои расходы.

О Цена p_0, при которой величина спроса равняется величине предложения, в экономике называется ***равновесной ценой***, а количество товара q_0, приобретаемого по этой цене, ***равновесным количеством товара***.

Для нахождения рыночного равновесия достаточно решить систему уравнений $\begin{cases} q = f(p) \\ q = \varphi(p) \end{cases}$, где $q = f(p)$ — функция спроса на некоторый товар; $q = \varphi(p)$ — функция предложения этого же товара на рынке. Относительно найденного значения p_0 можно выделить два случая.

Случай 1. Если цена товара на рынке будет превышать равновесную цену p_0, то можно ожидать ее снижение в ближайшее время, так как появятся излишки предлагаемого товара.

Случай 2. Если цена на рынке окажется меньше равновесной (например, если государство в приказном порядке установит цену меньше p_0), то следует ожидать, что в ближайшее время она повысится, в противном случае — дефицит товара, очереди, возникновение «черного рынка» и т. д.

Пример. Функция спроса на рынке некоторого товара имеет вид: $q = \dfrac{200}{p}$, а функция предложения $q = p - 10$, где q — объем спроса (предложения) (тыс. шт.); p — цена единицы товара (руб.). Требуется найти:

1) диапазон изменения цены на рассматриваемый товар;

2) рыночное равновесие;

3) выручку продавца при продаже товара по равновесной цене;

4) величину излишков товара при $p = 25$ руб. и величину дефицита при $p = 15$ руб.;

5) новую функцию предложения и новое рыночное равновесие после введения государством налога на единицу товара в размере 1 руб. Сравните суммы, полученные продавцом до и после введения налога;

6) новую функцию предложения и новое рыночное равновесие, если за каждую проданную единицу товара производители получают из бюджета дотацию в размере 1 руб. Сравните суммы, получаемые продавцами до и после введения дотации;

7) количество товара (излишки продукта), закупаемого государством, и сумму, в которую ему это обходится, если оно для поддержания производителя решило установить твердую цену в 22 руб. за каждую единицу товара;

8) сделать схематический чертеж.

Решение. 1) По условию $p \ge 0$ и $q \ge 0$. Согласно условию задачи, получим

$$\begin{cases} p \ge 0 \\ \dfrac{200}{p} \ge 0 \\ p - 10 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p \ge 0 \\ p > 0 \\ p \ge 10 \end{cases} \Rightarrow p \in [10; +\infty).$$

Таким образом, при цене единицы товара 10 руб. и менее продавцы не поставляют товар на рынок (при $p = 10$ предложение $q = 0$, а спрос есть $q = \dfrac{200}{10} = 20$ (тыс. шт.)). При $p > 10$ предложение растет, а спрос падает (становится меньше 20).

2) Для нахождения рыночного равновесия решим систему уравнений:

$$\begin{cases} q = \dfrac{200}{p} \\ q = p - 10 \end{cases} \Rightarrow \frac{200}{p} = p - 10 \Rightarrow p^2 - 10p - 200 = 0;$$

$$D = 100 + 800 = 900; \ \sqrt{D} = 30;$$

$$p_1 = \frac{10 - 30}{2} = -10 \text{ (не подходит, так как } p \ge 0\text{)}; \ p_2 = \frac{10 + 30}{2} = 20.$$

Таким образом, получаем единственное решение $p_0 = 20$ (руб.).

Ему соответствует $q_0 = \dfrac{200}{20} = 10$ (тыс. шт.).

Итак, рыночное равновесие характеризуется ценой за единицу товара $p_0 = 20$ руб. При этой цене покупатели приобретут, а производители поставят товара в количестве $q_0 = 10$ тыс. шт.

3) Выручка продавца при продаже товара по равновесной цене составит: $u_1 = p_0 q_0 = 20 \cdot 10 = 200$ (тыс. руб.).

4) При $p = 25$ величина предложения $q_1 = 25 - 10 = 15$ (тыс. шт.), а величина спроса $q_2 = \dfrac{200}{25} = 8$ (тыс. шт.). Таким образом, при этой цене предложение превышает спрос (т. е. появляются излишки товара) на $q_1 - q_2 = 15 - 8 = 7$ (тыс. шт.). При $p = 15$ величина предложения $q_1 = 15 - 10 = 5$ (тыс. шт.), а величина спроса $q_2 = \dfrac{200}{15} = 13\dfrac{1}{3}$ (тыс. шт.). Таким образом, при этой цене спрос превышает предложение (т. е. появляется дефицит товара) на $q_2 - q_1 = 13\dfrac{1}{3} - 5 = 8\dfrac{1}{3}$ (тыс. шт.) $\approx$ 8333 шт.

5) Введение налога размером 1 руб. на каждую единицу товара приведет к тому, что на 1 руб. возрастет цена каждой единицы товара и новая функция предложения будет иметь вид: $p = q + 10 + 1$, или $p = q + 11$.

Новое рыночное равновесие найдем из системы уравнений:

$$\begin{cases} p = \dfrac{200}{q} \\ p = q + 11 \end{cases} \Rightarrow \frac{200}{q} = q + 11 \Rightarrow q^2 + 11\,q - 200 = 0;$$

$$D = 121 + 800 = 921;\ \sqrt{D} \approx 30{,}348;$$

$$q_1 = \frac{-11 - 30{,}348}{2} = -20{,}674 \text{ (не подходит, так как } q \geq 0);$$

$$q_2 = \frac{-11 + 30{,}348}{2} = 9{,}674.$$

Таким образом, получаем единственное решение $q_0 = 9{,}674$ (тыс. шт.). Ему соответствует $p_0 = \dfrac{200}{q_0} \approx 20{,}67$ (руб.).

Итак, новое рыночное равновесие характеризуется ценой за единицу товара $p_0 = 20{,}67$ руб. По этой цене покупатели приобретут, а производители поставят товар в количестве $q_0 = 9{,}674$ тыс. шт.

Выручка продавца при продаже товара по новой равновесной цене составит:

$$u_2 = p_0\, q_0 = 20{,}67 \cdot 9674 = 199\,962 \text{ (руб.)}.$$

Вычислим налог, который заплатит продавец государству:

$$u_3 = 1 \cdot 9674 = 9674 \text{ (руб.)}.$$

После реализации товара и уплаты налога у продавца останется сумма $u_4 = u_2 - u_3 = 199\,962 - 9\,674 = 190\,288$ (руб.). Эта сумма на 9712 руб. меньше выручки, полученной от продажи товара по первоначальной равновесной цене (200 000 – 190 288 = 9 712).

6) Введение государством дотации в размере 1 руб. на каждую единицу товара приведет к тому, что на 1 руб. уменьшится цена каждой единицы продукта и новая функция предложения будет иметь вид:

$$p = q + 10 - 1, \text{ или } p = q + 9.$$

Новое рыночное равновесие найдем из системы уравнений:

$$\begin{cases} p = \dfrac{200}{q} \\ p = q + 9 \end{cases} \Rightarrow \frac{200}{q} = q + 9 \Rightarrow q^2 + 9q - 200 = 0;$$

$$D = 81 + 800 = 881;\ \sqrt{D} \approx 29{,}682;$$

$$q_1 = \frac{-9 - 29{,}682}{2} = -19{,}341 \text{ (не подходит, так как } q \geq 0);$$

$$q_2 = \frac{-9 + 29{,}682}{2} = 10{,}341.$$

Таким образом, получаем единственное решение $q_0 = 10{,}341$ (тыс. шт.). Ему соответствует $p_0 = \frac{200}{q_0} \approx 19{,}34$ (руб.).

Итак, новое рыночное равновесие характеризуется ценой за единицу товара $p_0 = 19{,}34$ руб. По этой цене покупатели приобретут, а производители поставят $q_0 = 10{,}341$ тыс. шт. товара.

Выручка продавца при продаже товара по новой равновесной цене составит: $u_2 = p_0 q_0 = 19{,}34 \cdot 10\,341 = 199\,995$ руб. Эта сумма на 5 руб. меньше выручки, полученной от продажи товара по первоначальной равновесной цене.

7) Если для поддержания производителя государство решило установить твердую цену в размере 22 руб. за каждую единицу товара, то величины предложения и спроса при этой цене соответственно равны:

$$q_1 = 22 - 10 = 12 \text{ (тыс. шт.)}$$

и

$$q_2 = \frac{200}{22} = 9{,}091 \text{ (тыс. шт.)}.$$

Таким образом, при этой цене предложение превышает спрос на $q_1 - q_2 = 12 - 9{,}091 = 2{,}909$ (тыс. шт.). Эти излишки закупает государство и тратит на это сумму $u = 22(q_1 - q_2) = 22 \cdot 2{,}909 = 63{,}998$ (тыс. руб.), или 63 998 руб.

8) Схематический чертеж представлен на рис. 1.17.

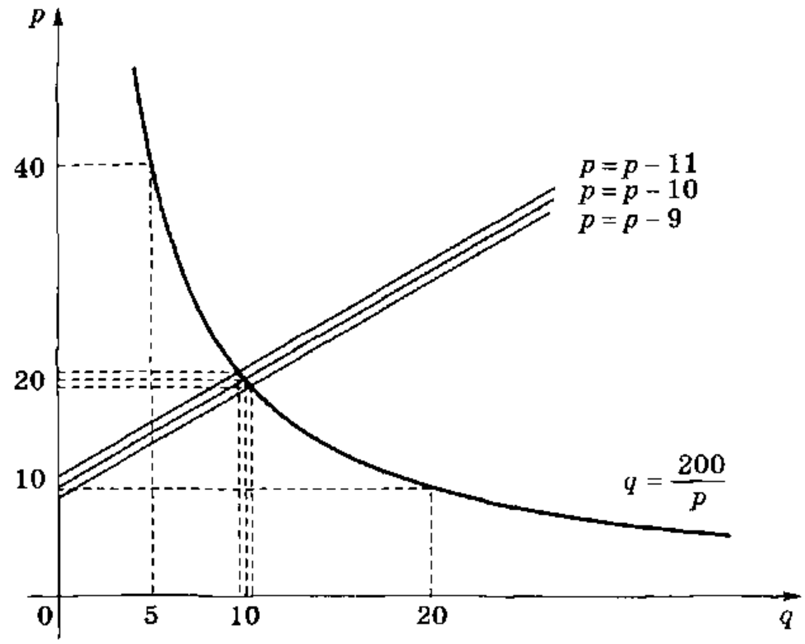


Рис. 1.17

1.2.4. Производственные функции

Производственные функции (ПФ) отражают зависимость результата производственной деятельности от обусловивших его факторов. Дадим два взаимосвязанных определения однофакторной ПФ, т. е. ПФ одной переменной.

$\boxed{\text{О1}}$ Функцию, выражающую зависимость между объемом y выпускаемой продукции и объемом x перерабатываемого ресурса, называют ***однофакторной ПФ***.

$\boxed{\text{О2}}$ Функцию, выражающую зависимость между суммарной стоимостью y выпускаемой продукции и стоимостью x суммарных затрат на ее производство, называют ***однофакторной ПФ***.

Из этих определений следует, что данные функции могут задаваться как в объемном (тонны, киловатт-часы и т. п.), так и стоимостном (рубль, доллар, евро и т. п.) выражении.

Наряду с линейными ПФ используются нелинейные функции, такие, как дробно-рациональные, степенные (квадратная, кубическая и др.), показательные (экспоненциальные), логарифмические. Периодичность (колеблемость) ряда экономических процессов позволяет также использовать тригонометрические ПФ.

Пример. При статистическом обследовании фермерских хозяйств была установлена следующая зависимость урожайности картофеля с одного гектара от количества внесенных органических удобрений:

а) без внесения удобрений урожайность составила 30 т;

б) при внесении 5 т удобрений урожайность составила 50 т;

в) при внесении 10 т удобрений урожайность составила 45 т.

С помощью ПФ вида $y = ax^2 + bx + c$ требуется:

1) установить аналитическую зависимость урожайности y (тонн) картофеля с одного гектара от количества x (тонн) внесенных на этот гектар органических удобрений;

2) по графику ПФ найти максимальное значение урожайности y и соответствующий ему расход удобрения.

Решение. 1) Из условия задачи можно заключить, что при $x = 0$: $y = 30$; при $x = 5$: $y = 50$; при $x = 10$: $y = 45$.

Подставляя эти значения в ПФ $y = ax^2 + bx + c$, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} a\cdot 0 + b\cdot 0 + c = 30; \\ a\cdot 5^2 + b\cdot 5 + c = 50; \\ a\cdot 10^2 + b\cdot 10 + c = 45; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 30; \\ 25a + 5b + 30 = 50; \\ 100a + 10b + 30 = 45; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 30; \\ 5a + b = 4; \\ 20a + 2b = 3. \end{cases}$$

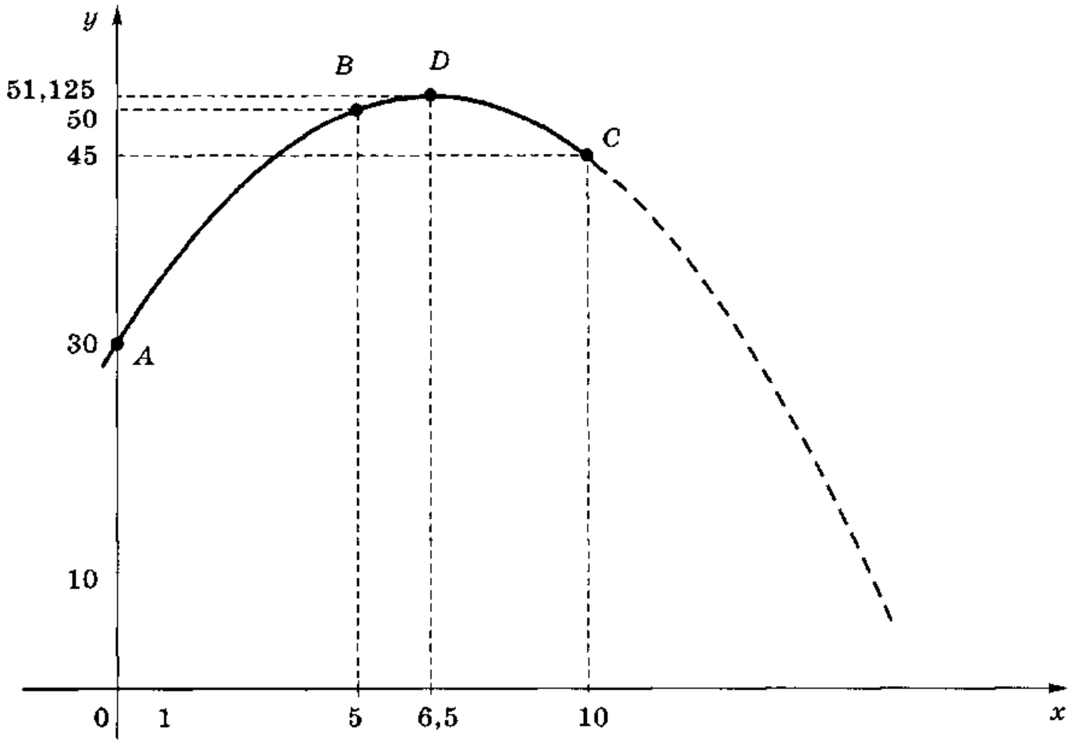


Рис. 1.18

Выражая из второго уравнения b и подставляя полученный результат в третье уравнение, будем иметь:

$$\begin{cases} c = 30; \\ b = 4 - 5a; \\ 20a + 2(4 - 5a) = 3; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 30; \\ b = 4 - 5a; \\ a = -\dfrac{1}{2}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 30; \\ b = 4 - 5\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{13}{2}; \\ a = -\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Итак, $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{13}{2}x + 30 = -\frac{1}{2}(x^2 - 13x - 60) = -\frac{1}{2}\left[\left(x - \frac{13}{2}\right)^2 - \frac{409}{4}\right] =$

$$= -\frac{1}{2}\left(x - \frac{13}{2}\right)^2 + \frac{409}{8} = -\frac{1}{2}(x - 6{,}5)^2 + 51{,}125.$$

2) Начертим график функции $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{13}{2}x + 30$. Он проходит через точки A (0; 30); B (5; 50); C (10; 45) и имеет максимальное значение в точке D (6,5; 51,125) (рис. 1.18).

Таким образом, максимальная урожайность картофеля равна 51 125 кг при внесении 6,5 т органических удобрений.