1. Вычислить определенные интегралы:

ТЕОРИЯ

Если функция $y = f(x)$ определена, непрерывна и имеет первообразную *F(x)* на отрезке [a;b], то определенный интеграл вычисляется по формуле Ньютона – Лейбница $\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$.

При вычислении определенных интегралов широко используется метод замены переменной и метод интегрирования по частям.

Интегрирование подстановкой

Пусть для вычисления интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$ от непрерывной функции сделана подстановка $x = \varphi$ (t)

Теорема. Если:

1) функция $x = \varphi(t)$ и её производная $x' = \varphi'(t)$ непрерывны при $t \in [d;\beta]$;

2) множеством значений функции $x = \varphi(t)$ при $t \in [\alpha;\beta]$ является отрезок [a;b];

3) $\varphi(\alpha) = a$ и $\varphi(\beta) = b$ **то** $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt$

Интегрирование по частям

Теорема. Если функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ имеют непрерывные производные на отрезке [a;b], то имеет место формула $\int\limits_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b v du$.

$a)\ \int\limits_{-1}^{3} (2x^2 + 5)dx$

$$\int\limits_{-1}^{3}(2x^2+5)dx = \left(\frac{2x^3}{3}+5x\right)\Bigg|_{-1}^{3} = \left(\frac{2\cdot 3^3}{3}+5\cdot 3\right) - \left(\frac{2\cdot(-1)^3}{3}+5\cdot(-1)\right) =$$

$$= (18+15) - \left(-\frac{2}{3}-5\right) = 33 + \frac{2}{5} + 5 = \boxed{38\frac{2}{5}}$$

б) $\int\limits_{1}^{\frac{4}{3}} \frac{dx}{(3x-2)^5}$ (методом подстановки)

$$\int\limits_{1}^{\frac{4}{3}} \frac{dx}{(3x-2)^5} = \left[\begin{array}{l} t = 3x-2 \\ dt = (3x-2)'dx = 3dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{3} \\ t_1 = 3\cdot 1 - 2 = 1 \\ t_2 = 3\cdot\frac{4}{3} - 2 = 2 \end{array}\right] = \int\limits_1^2 \frac{1}{t^5}\cdot\frac{dt}{3} = \frac{1}{3}\int\limits_1^2 t^{-5}dt =$$

$$= \left(\frac{1}{3}\cdot\frac{t^{-4}}{-4}\right)\Bigg|_1^2 = \left(-\frac{1}{12t^4}\right)\Bigg|_1^2 = -\frac{1}{12\cdot 2^4} - \left(-\frac{1}{12\cdot 1^4}\right) = -\frac{1}{12\cdot 16} + \frac{1}{12} =$$

$$= \frac{-1+16}{12\cdot 16} = \boxed{\frac{15}{192}}$$

в) $\int\limits_1^2 (2x+3)\, \boldsymbol{lnx}\, dx$ (методом интегрирования по частям)

$$\int\limits_1^2 (2x+3)\ln x\,dx = \left[\begin{matrix} u=\ln x & du=\frac{1}{x}dx \\ dv=(2x+3)dx & v=\int dv=\int(2x+3)dx=\frac{2x^2}{2}+3x=x^2+3x \end{matrix}\right] =$$

$$=\left((x^2+3x)\ln x\right)\Big|_1^2-\int\limits_1^2 (x^2+3x)\cdot\frac{1}{x}\,dx=\left((x^2+3x)\ln x\right)\Big|_1^2-\int\limits_1^2\frac{x^2+3x}{x}\,dx=$$

$$=\left((x^2+3x)\ln x\right)\Big|_1^2-\int\limits_1^2(x+3)\,dx=\left((x^2+3x)\ln x\right)\Big|_1^2-\left(\frac{x^2}{2}+3x\right)\Big|_1^2=$$

$$=(2^2+3\cdot2)\cdot\ln 2-(1^2+3\cdot1)\underbrace{\ln 1}_{=0}-\left(\frac{2^2}{2}+3\cdot2-\left(\frac{1^2}{2}+3\cdot1\right)\right)=$$

$$=10\ln 2-\left(2+6-3\tfrac{1}{2}\right)=10\ln 2-\left(8-3-\tfrac{1}{2}\right)=\boxed{10\ln 2-4\tfrac{1}{2}}$$

г) $\int\limits_0^{\pi} (2x-1)\sin x\; dx$ (методом интегрирования по частям)

$$\int\limits_0^{\pi}(2x-1)\sin x\,dx=\left[\begin{matrix} u=2x-1 & du=d(2x-1)=(2x-1)'dx=2dx \\ dv=\sin x\,dx & v=\int dv=\int\sin x\,dx=-\cos x\end{matrix}\right]=$$

$$=\left((2x-1)\cdot(-\cos x)\right)\Big|_0^{\pi}-\int\limits_0^{\pi}(-\cos x)\cdot 2\,dx=\left(-(2x-1)\cos x\right)\Big|_0^{\pi}+2\int\limits_0^{\pi}\cos x\,dx=$$

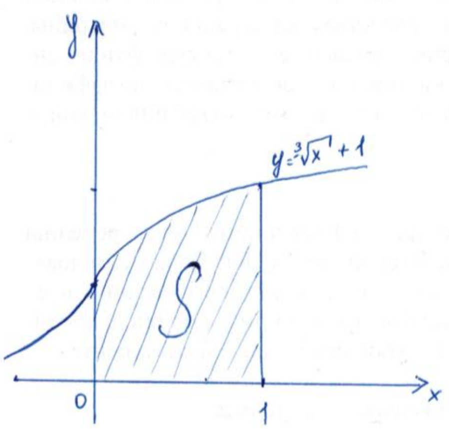
$$=\left((1-2x)\cos x\right)\Big|_0^{\pi}+\left(2\sin x\right)\Big|_0^{\pi}=\left((1-2\pi)\cos\pi-(1-2\cdot0)\cos 0\right)+\left(2\sin\pi-2\sin 0\right)=$$

$$=(1-2\pi)\cdot(-1)-1\cdot1+2\cdot0-2\cdot0=-1+2\pi-1=\boxed{2\pi-2}$$

2. **Вычислить площадь фигуры**, ограниченной указанными линиями $y=\sqrt[3]{x}+1$ $y=0,$ $x=0$ и $x=1.$

Решение

1) **Сделаем чертеж**



2) **Вычислим площадь фигуры по формуле**:

$$\boldsymbol{S}=\int\limits_a^b \boldsymbol{f(x)dx}$$

где $f(x)=\sqrt[3]{x}+1, a=0, b=1.$

$$S=\int\limits_0^1\left(\sqrt[3]{x}+1\right)dx=\int\limits_0^1\left(x^{\frac{1}{3}}+1\right)dx=$$

$$=\left(\frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}+x\right)\Big|_0^1=\left(\frac{3x^{\frac{4}{3}}}{4}+x\right)\Big|_0^1=$$

$$=\frac{3\cdot1^{\frac{4}{3}}}{4}+1-\left(\frac{3\cdot0^{\frac{4}{3}}}{4}+0\right)=$$

$$=\frac{3}{4}+1=\boxed{1\frac{3}{4}}$$

Ответ: $1\frac{3}{4}$ ед^2.

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной указанными линиями $y = x^2 + 2,\ \ y = x + 4$.

Решение

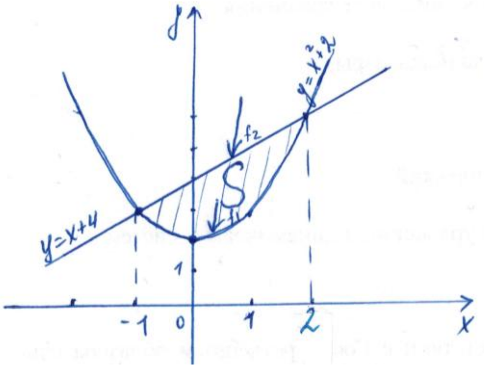
1) Найдем абсциссы точек пересечения:

$x^2+2=x+4$

$x^2-x-2=0$

$x_1=-1;\ x_2=2$

2) Сделаем чертеж:



3) Вычислим площадь фигуры по формуле:

$$S=\int_a^b (f_2(x)-f_1(x))dx \text{ , где}$$

$f_2(x)\geq f_1(x)$; $f_1(x)=x^2+2$; $f_2(x)=x+4$

Пределы интегрирования – точки пересечения f_1 и f_2:

$-1;\ 2$

$$S=\int_{-1}^{2}(x+4-(x^2+2))dx=\int_{-1}^{2}(x+4-x^2-2)dx=\int_{-1}^{2}(-x^2+x+2)dx=\left(-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x\right)\Big|_{-1}^{2}=$$

$$=\left(-\frac{2^3}{3}+\frac{2^2}{2}+2\cdot 2\right)-\left(-\frac{(-1)^3}{3}+\frac{(-1)^2}{2}+2\cdot(-1)\right)=-\frac{8}{3}+2+4-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-2\right)=$$

$$=-\frac{8}{3}+6-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+2=-3+8-\frac{1}{2}=5-\frac{1}{2}=\boxed{4\frac{1}{2}\text{ ед}^2}$$

Ответ: $4\frac{1}{2}$ ед^2.

4. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной функциями:
$x - y + 1 = 0, 2x + 3y - 8 = 0, y = 0.$

Решение

1) Найдем точку пересечения прямых:

$x-y+1=0$ и $2x+3y-8=0$

$y=x+1$ $\qquad 3y=8-2x$

$\qquad\qquad y=-\frac{2}{3}x+\frac{8}{3}$

$x+1=-\frac{2}{3}x+\frac{8}{3}\ \Big|\cdot 3$

$3x+3=-2x+8$

$5x=5$

$x=1$

$y=1+1$

$y=2$ $\quad (1;2)$

Найдем точки пересечения прямых с осью O_x:

$x+1=0$

$x=-1$

$(-1;0)$

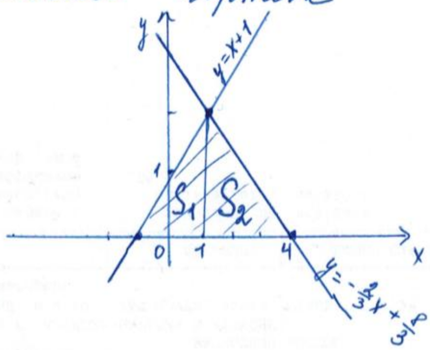
$-\frac{2}{3}x+\frac{8}{3}=0 \;|\cdot(-3)$

$2x-8=0$

$2x=8$

$x=4 \qquad (4;0)$

1) Сделаем чертеж



3) Вычислим площадь фигуры по формуле.

$$S=S_1+S_2=\int_a^b f_1(x)\,dx+\int_b^c f_2(x)\,dx,\ \text{где}$$

$f_1(x)=x+1;\quad f_2(x)=-\frac{2}{3}x+\frac{8}{3};\quad a=-1;\ b=1;\ c=4$

$$S=S_1+S_2=\int_{-1}^{1}(x+1)\,dx+\int_1^4\left(-\frac{2}{3}x+\frac{8}{3}\right)dx=\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Bigg|_{-1}^{1}+\left(-\frac{\cancel{2}x^2}{3\cdot\cancel{2}}+\frac{8}{3}x\right)\Bigg|_1^4=$$

$$=\frac{1^2}{2}+1-\left(\frac{(-1)^2}{2}-1\right)+\left(-\frac{4^2}{3}+\frac{8\cdot4}{3}-\left(-\frac{1}{3}+\frac{8}{3}\right)\right)=\frac{1}{2}+1-\left(\frac{1}{2}-1\right)+\left(-\frac{16}{3}+\frac{32}{3}-\frac{7}{3}\right)=$$

$$=\cancel{\frac{1}{2}}+1-\cancel{\frac{1}{2}}+1+\frac{9}{3}=2+3=\boxed{5\text{ ед}^2}$$

Ответ: 5 ед^2.