МАТРИЦЫ В ЭКОНОМИКЕ

1.В таблице указанно количество единиц продукции, отгружаемой ежедневно на молокозаводах 1 и 2 магазины M_1 ,M_2 и M_3 ,причем доставка единицы продукции с каждого молокозавода в магазин M_1 стоит 50 ден. ед., в магазин M_2-70,а в M_3-130 ден. ед. Подсчитать ежедневные транспортные расходы каждого завода.

Таблица 1.

Молокозавод	Магазин		
	M_1	M_2	M_3
1	20	35	10
2	15	27	8

Обозначим через А-матрицу количества единиц продукции, В-матрицу характеризующую стоимость доставки единицы продукции в магазины, т.е. $A = \begin{pmatrix} 20\,35\,10 \\ 15\,27\ \ 8 \end{pmatrix}$ $B = (50\ 70\ 130)$ тогда матрица затрат на перевозки будет иметь вид :

$$AB^T = \begin{pmatrix} 20\,35\,10 \\ 15\,27\ \ 8 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 50 \\ 70 \\ 130 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20*50+ & 35*70+ & 1300 \\ 150*50+ & 27*70+ & 8*130 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4750 \\ 3680 \end{pmatrix}$$

Трансплонируем матрицу В, т.к. в противном случае нельзя было бы вычислить произведение матриц.

Итак, первый завод ежедневно тратит на перевозки 4750 ден. ед., второй -3680 ден. ед.

2.Мороженщица, торгующая в кинотеатре, перед утренним сеансом продала 36 порций пломбира; 8 порций в стаканчиках ; 10 порций в брикетах, 7 порций в трубочках и 11 порций в рожках; перед дневным сеансов -62 порции ;соответственно 16,15,13 и 18. Наибольший спрос пришелся на вечер -101 порция: 25,21,31,24 соответственно. Определим утреннюю, дневную и вечернюю выручку продаж при цене 3 руб. за порцию пломбира в стаканчиках, 1,5 руб. за порцию в брикетах,2 руб. за порцию в трубочках и 2,5 руб. за порцию в рожках.

Для решения задачи найдем произведение матрицы объемов продаж на матрицу стоимости каждого вида мороженного:

$$\begin{pmatrix} 8 & 10 & 7 & 11 \\ 10 & 15 & 13 & 18 \\ 25 & 21 & 31 & 24 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 3 \\ 1{,}5 \\ 2 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 80{,}5 \\ 141{,}5 \\ 228{,}5 \end{pmatrix}$$

Очевидно, что к этим результатам можно прийти, умножив стоимость каждого вида на количество проданного мороженого соответственно утром,днем и вечером. Предлагаем Вам убедиться в этом самостоятельно. Получившееся решение более громоздко по сравнению с приведенным выше. И более того, его можно очень быстро выполнить, воспользовавшись электронными таблицами при любых значениях стоимости. (Ведь при дробных значениях стоимости видов мороженного процесс вычислений существенно будет усложняться.

3. Швейное предприятие производит зимние пальто, демисезонные пальто и плащи. Плановый выпуск за декаду характеризуется матрицей X=(10,15,23). Используя ткани четырех типов T_1,T_2,T_3 и T_4.В таблицу два приведены нормы расхода ткани (в метрах) на каждое изделие. Матрица C=(40,35,24,16) задает стоимость метра ткани каждого типа а матрица

P=(5,3,2,2)-стоимость перевозки метра ткани каждого вида

Таблица 2.

Изделие	Расход ткани			
	T_1	T_2	T_3	T_4
Зимнее пальто	5	1	0	3
Демисезонное пальто	3	2	0	2
Плащ	0	0	4	3

1.Сколько метров ткани каждого типа потребуется для выполнения плана?

2.Найти стоимость ткани, расходуемой на пошив изделия каждого вида?

3.Определить стоимость всей ткани с учетом ее транспортировки

Решение. Обозначим через А матрицу данную нам в условии, т.е.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Тогда для нахождения количества метров ткани необходимо для выполнения плана, нужно матрицу X умножить на матрицу А :

$$(10 \quad 15 \quad 23) * \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} = (95 \quad 40 \quad 92 \quad 129)$$

Стоимость ткани ,расходуемой на пошив изделия каждого вида, найдем, перемножив матрицу А и транспонированную матрицу C^T:

$$A * C^T = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 40 \\ 35 \\ 24 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 283 \\ 222 \\ 114 \end{pmatrix}$$

Стоимость всей ткани ,необходимой для выполнения плана, определяется по формуле:

$$(10 \quad 15 \quad 23) * \begin{pmatrix} 40 \\ 35 \\ 24 \\ 16 \end{pmatrix} = (9472)$$

Наконец, с учетом транспортных расходов вся сумма будет равна стоимости ткани , т.е. 9472 ден. ед. плюс величина

$X * A * P^T$=(1037)

Итак, $X * A * C^T + X * A * P^T$=9472+13037=10509(ден. ед.)

4. Выполнить расчёт заработной платы, приходящийся на каждый заказ при изготовлении разных деталей, если известны следующие данные:

а) затраты рабочего времени в часах на каждом рабочем месте и на каждое изделие (табл. 6):

Таблица 6

Изделие	Затраты на рабочем месте				
	1	2	3	4	5
A	2	1	4	5	0
B	1	4	2	5	2
C	0	1	0	3	4

б) количество изделий (в штуках) в каждом заказе (табл. 7):

Таблица 7

Заказ	Количество изделий		
	A	B	C
K	0	4	2
L	0	2	4
M	5	1	0

в) часовая заработная плата (в руб.) на каждом рабочем месте (табл. 8):

Таблица 8

Рабочее место	Часовая заработная плата
1	1,25
2	1,50
3	1,40
4	1,40
5	1,25

Решение. Введём матрицы, соответствующие каждой из трёх таблиц:

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 5 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 1,25 \\ 1,50 \\ 1,40 \\ 1,40 \\ 1,25 \end{pmatrix}.$$

Произведение матриц PY задаёт зависимость между выпуском изделий и величиной заработной платы, а произведение $Q(PY)$ определяет величину заработной платы, приходящейся на выполнение каждого заказа.

$$Q(PY) = \begin{pmatrix} 99,60 \\ 81,90 \\ 102,55 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, заработная плата, приходящаяся на заказ K, составляет 99,60 руб., на заказ L – 81,90 руб., на заказ M – 102,55 руб.

Модель Леонтьева многоотраслевой экономики

Рассмотрим взаимодействие n отраслей национальной экономики. Каждая отрасль выпускает какой-то определенный продукт, для производства которого требуется продукция каждой из этих n отраслей. Пусть a_{ij} – объем продукции i-й отрасли, необходимый для производства одной единицы продукта j-й отрасли. Числа a_{ij} $(i=1, 2,..., n;\ j=1, 2,..., n)$ называются коэффициентами прямых затрат j-й отрасли. Составим матрицу коэффициентов прямых затрат

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Пусть за какой-то промежуток времени первая отрасль производит x_1 единиц продукции, вторая отрасль – x_2 единиц, …, n-ная отрасль – x_n единиц. За это же время полные затраты i-й отрасли составляют

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \ (i=1, 2,..., n).$$

Ведём обозначение: $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$. Этот столбец называется вектором валового выпуска. Столбец $\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \end{pmatrix} = AX$ выражает затраты на производственные цели.

Оставшаяся часть продукции $X - AX$ может расходоваться на непроизводственные цели (потребление и накопление). Обозначим столбец $X - AX$ буквой Y. Он называется вектором конечного продукта. Получаем матричное уравнение $X - AX = Y$ или $(E - A)X = Y$.

Основная задача межотраслевого баланса состоит в отыскании такого вектора валового выпуска X, который при известной матрице прямых затрат A обеспечивает заданный вектор конечного продукта Y.

Вектор X находится по формуле $X=(E-A)^{-1}Y = SY$. Матрица $S=(E-A)^{-1}$ называется матрицей полных затрат, элементы которой показывают величину валового выпуска продукции i-й отрасли, необходимой для обеспечения выпуска единицы конечного продукта j-й отрасли $y_j = 1$ $(j=1, 2,..., n)$.

Матрица A с неотрицательными элементами $A \ge 0$ называется продуктивной, если для любого вектора $Y \ge 0$ существует решение $X \ge 0$ уравнения $(E-A)X = Y$.

Известно, что матрица A продуктивна, если $a_{ij} \ge 0$ для любых $i=1, 2,..., n$ и $j=1, 2,..., n$ и $\max\limits_{j=1,2,...,n} \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} \le 1$ и существует номер j такой, что $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} < 1$.

Чистой продукцией отрасли называется разность между валовой продукцией этой отрасли и затратами продукции всех отраслей на производство этой отрасли.

Пример. В табл. 9 приведены коэффициенты прямых затрат и конечная продукция отраслей на плановый период, усл. ден. ед.

Таблица 9

Отрасль		Потребление		Конечный продукт
		Промышленность	Сельское хозяйство	
Производство	Промышленность	0,3	0,2	300
	Сельское хозяйство	0,15	0,1	100

Найдите:

а) плановые объёмы валовой продукции отраслей, межотраслевые поставки, чистую продукцию отраслей;

б) необходимый объём валового выпуска каждой отрасли, если конечное потребление продукции сельского хозяйства увеличится на 20%, а промышленность на 10%.

Решение. а) Выпишем матрицу коэффициентов прямых затрат A, вектор конечной продукции Y: $A=\begin{pmatrix}0,3 & 0,2\\ 0,15 & 0,1\end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix}300\\ 100\end{pmatrix}$.

Заметим, что матрица A продуктивна, т.к. её элементы положительны и сумма элементов в каждом столбце меньше единицы.

Найдём матрицу $E-A=\begin{pmatrix}1-0,3 & -0,2\\ -0,15 & 1-0,1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0,7 & -0,2\\ -0,15 & 0,9\end{pmatrix}$.

Тогда матрица полных затрат

$$S=(E-A)^{-1}=\frac{1}{0,6}\begin{pmatrix}0,9 & 0,2\\ 0,15 & 0,7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1,5 & 0,33\\ 0,25 & 1,17\end{pmatrix}.$$

Вектор валового продукта $X=\begin{pmatrix}1,5 & 0,33\\ 0,25 & 1,17\end{pmatrix}\begin{pmatrix}300\\ 100\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}483\\ 192\end{pmatrix}$.

Межотраслевые поставки $x_{ij}=a_{ij}x_j$.

Например, $x_{11}=a_{11}x_1=0,3\cdot 483=144,9$.

Валовые продукты отраслей, межотраслевые поставки, а также чистая продукция отраслей приведены в табл. 10.

Таблица 10

Отрасль		Потребление		Конечный продукт	Валовой продукт
		Промышленность	Сельское хозяйство		
Производство	Промышленность	144,9	38,4	300	483
	Сельское хозяйство	72,5	19,2	100	192
Чистая продукция		265,5	134,4		
Валовая продукция		483	192		

б) По условию вектор конечного продукта $Y=\begin{pmatrix}300\cdot 1,1\\ 100\cdot 1,2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}330\\ 120\end{pmatrix}$. Тогда вектор валового выпуска $X=S\cdot Y=\begin{pmatrix}1,5 & 0,33\\ 0,25 & 1,17\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}330\\ 120\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}534,6\\ 221,9\end{pmatrix}$.

Таким образом, выпуск в промышленности нужно увеличить до 534,6 усл. ден. ед., а в сельском хозяйстве – до 221,9 усл. ден. ед.