ПРИМЕР. Исследовать функцию и построить ее график $\boldsymbol{f(x) = x^3 - 3x^2 + 4}$

1)Найдем область определения функции.

D(f): $x \in R$.

2) Исследуем функцию на четность, нечетность и периодичность.

$\boldsymbol{f(-x)} = (-x)^3 - 3(-x)^2 + 4 = \boldsymbol{-x^3 - 3x^2 + 4} = -(\boldsymbol{x^3 + 3x^2 - 4})$

$f(-x) \neq f(x)$ => не является четной

$f(-x) \neq -f(x)$ => не является нечетной

Значит, $f(x)$ – общего вида.

Функция не являетеся периодической.

3) Исследуем характер точек разрыва функции и поведение функции на бесконечности.

Т.к. D(f): $x \in R$, то она всюду непрерывна и нет точек разрыва функции.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(x^3 - 3x^2 + 4) = +\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(x^3 - 3x^2 + 4) = -\infty$$

4) Найдем асимптоты графика функции.

а)<u>Вертикальные.</u>

Т.к. нет точек разрыва функции, то ***нет вертикальных асимптот***.

б) <u>Наклонные асимптоты</u> находим в виде $y = kx + b$.

Для правой ветви графика функции имеем:

$k = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^3-3x^2+4}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{x^3}{x} - \frac{3x^2}{x} + \frac{4}{x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^2 - x + \frac{4}{x}\right) = +\infty$ => ***нет наклонных асимптоты для правой ветви.***

Для левой ветви графика функции имеем:

$k = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^3-3x^2+4}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{x^3}{x} - \frac{3x^2}{x} + \frac{4}{x}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(x^2 - x + \frac{4}{x}\right) = +\infty$=> ***нет наклонных асимптоты для левой ветви***.

5) Найдем интервалы монотонности и экстремумы функции.

Вычислим первую производную функции:

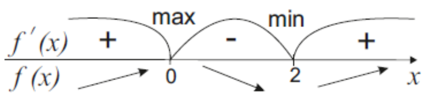
$f'(x) = (x^3 - 3x^2 + 4)' = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$.

Найдем критические точки 1 рода из условий $f'(x) = 0$.

$$3x(x-2) = 0;$$
$$x(x-2) = 0;$$
$$x = 0 \text{ или } x - 2 = 0;$$
$$x = 2.$$

$x_1 = 0, x_2 = 2$ – критические точки 1 рода.

Отметим эти точки на числовой оси



Определим знак первой производной на каждом интервале:

$(-\infty; 0)$: $f'(-1) = 3\cdot(-1)^2 - 6\cdot(-1) = 3 + 9 = 12 > 0$ => *функция* ***возрастает*** *на данном интервале*.

$(0; 2)$: $f'(1) = 3\cdot(1)^2 - 6\cdot 1 = 3 - 6 = -3 < 0$ => *функция* ***убывает*** *на данном интервале*.

$(2; +\infty)$: $f'(3) = 3\cdot 3^2 - 6\cdot 3 = 27 - 18 = 9 > 0$ => *функция* ***возрастает*** *на данном интервале*.

Определим точки максимума, минимума и значение функции в этих точках:

$\boldsymbol{x_1 = 0}$ **- точка максимума**, т.к. при переходе через эту точку (слева направо) производная меняет знак с «+» на «-»

$\boldsymbol{f_{max}(0)} = 0^3 - 3\cdot 0^2 + 4 = \boldsymbol{4}$

(0;4) – точка $\boldsymbol{max}$ функции

$\boldsymbol{x_2 = 2}$ **- точка минимума**, т.к. при переходе через эту точку (слева направо) производная меняет знак с «-» на «+»

$\boldsymbol{f_{min}(2)} = 2^3 - 3\cdot 2^2 + 4 = 8 - 12 + 4 = \boldsymbol{0}$

(2;0) – точка $\boldsymbol{min}$ функции

6) Найдем интервалы направления выпуклости функции и точки перегиба:

Вычислим вторую производную функции:

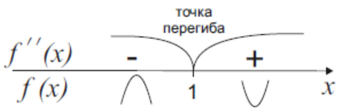
$f''(x) = \left(f'(x)\right)' = (3x^2 - 6x)' = 6x - 6 = 6(x-1).$

Найдем критические точки 2 рода из условий $f''(x) = 0$.

$6(x-1) = 0;$

$x - 1 = 0;$

$x = 1$ — критические точки 2 рода



Определим знак второй производной на каждом интервале:

$(-\infty; 1)$: $f''(0) = 6(0-1) = -6 < 0 =>$ *функция* ***выпукла вверх*** *на данном интервале*.

$(1; +\infty)$: $f''(2) = 6(2-1) = 6 > 0 =>$ *функция* ***выпуклавниз*** *на данном интервале*.

Определим точки перегиба и значение функции в этих точках:

$\boldsymbol{x = 1}$ **- точка перегиба**, т.к. при переходе через эту точку (слева направо) вторая производная меняет знак.

$\boldsymbol{f(1)} = 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 4 = \mathbf{1 - 3 + 4 = 2}$ => **точка (1;2) – точка перегиба графика** функции

7)Найдем точки пересечения с осями координат.

С осью O_y: при $x = 0$ $=> \boldsymbol{f(0)} = 0^3 - 3 \cdot 0^2 + 4 = \mathbf{4}$ =>

(0;4) – точка пересечения графика функции с осью O_y

С осью O_x: $f(x) = 0 \;=>\; x^3 - 3x^2 + 4 = 0$

$$x^3 - 2x^2 - x^2 + 4 = 0$$
$$x^2(x-2) - (x^2 - 4) = 0$$
$$x^2(x-2) - (x-2)(x+2) = 0$$
$$(x-2)(x^2 - (x+2)) = 0$$
$$(x-2)(x^2 - x - 2) = 0$$
$$x - 2 = 0 \;\; или \;\; x^2 - x - 2 = 0$$
$$x_1 = 2 \qquad или \;\; x_2 = -1; x_3 = 2$$

Точки пересечения графика функции с осью O_x: **(2;0) , (-1;0)**

Таблица результатов исследования

x	$(-\infty; 0)$	0	$(0; 1)$	1	$(1; 2)$	2	$(2; +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-		-	0	+
$f''(x)$	-		-	0	+		+
$f(x)$		4 max		2 Точка перегиба		0 min	

График функции