Системы линейных уравнений (СЛУ).

Система уравнений вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

называется ***системой m линейных уравнений с n неизвестными.***

$x_1,\ldots,x_n$ – *неизвестные*

a_{ij} – *коэффициеты при неизвестных*

$b_1,\ldots,b_m$ – *свободные члены*

Решением СЛУ называется упорядоченный набор чисел $\{c_1,\ldots,c_n\}$ такой, что при подстановке его в каждое уравнение системы получаем верное числовое равенство.

Если система имеет хотя бы одно решение, то она называется ***совместной*** , в противном случае ***несовместной.***

Совместная система называется ***определенной*** , если она имеет единственное решение.
Если совместная система имеет более одного решения, то она называется ***неопределенной***.
Если $b_1 = \ldots = b_m = 0,$ то СЛУ (1) называется ***однородной.***

Лемма: СЛУ (1) может быть записана в матричном виде: AX=B, где

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ – матрица коэффициентов,

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ – матрица свободных членов,

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ – матрица неизвестных.

Элементарные преобразования

(над строками матрицы можно производить три типа преобразований, которые не меняют множество решений соответствующей системы):
1) перестановка двух строк местами;
2) умножение всех элементов некоторой строки на любое ненулевое число;
3) прибавление к одной строке матрицы другой строки этой же матрицы, умноженной на любое число.

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СЛУ:

1) ***Правило Крамера:***

Пусть дана система 3-х линейных уравнений с тремя неизвестными.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_3 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$

Алгоритм решения:

1. В данной системе составим определитель матрицы коэффициентов и вычислим :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

2. Составить и вычислить следующие определители**:**

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_2 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

(получаются из определителя матрицы коэффициентов заменой 1(2,3) столбца столбцом свободных членов).

3. Если $\Delta \neq 0$, решение СЛУ может быть получено в виде: **.**

$\boxed{x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}, x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta}}$ **- формулы Крамера.**

При решении СЛУ по формулам Крамера возможны следующие случаи:

1) $\Delta \neq 0 \Rightarrow \exists!\ x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}, x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta}$
2) $\Delta = 0, \Delta_{x_i} = 0 \Rightarrow \infty$ **много решений** (система неопределенна)
3) $\Delta = 0$, но хотя бы один из Δ_{x_i} отличен от нуля, то **система несовместна**.

ЗАМЕЧАНИЕ: Правило Крамера применимо только в случае, если

- Число уравнений равно числу неизвестных
- Определитель матрицы коэффициентов при неизвестных отличен от нуля.